ESERCIZIO 1
Produzione di una misura[1]

Si vuole conoscere il valore della resistenza interna di un voltmetro magnetoelettrico, per due diversi scopi:

- operare correzioni per l'effetto del carico strumentale in misurazioni di tipo voltamperometrico (si tratta in questo caso di verificare l'attendibilità del dato fornito dal costruttore, ad esempio perché si teme che possa essere variato per qualche motivo);
- raddoppiare la portata del voltmetro tramite l'impiego di un "resistore addizionale" esterno, mantenendo inalterata la classe dello strumento.

PROBLEMA

Scegliere un metodo di misurazione adeguato per misurare il valore della resistenza interna di un voltmetro magnetoelettrico.

DATI

- Voltmetro per correnti continue in classe 0,5, con fondo scala di $100\,\mathrm{V}$ e carico strumentale dichiarato di $200\,\Omega/\mathrm{V}$;
- Strumenti disponibili:
  - ohmetro "a tre cifre e mezza" con incertezza di $1\ count{+}0,7\%\ lettura$;
  - milliamperometro in classe 0,2 e con $FS = 10\,\mathrm{mA}$ e resistenza interna $R_A \approx 10\,\Omega$;
  - vari resistori (si suppone di disporre di tutti quelli necessari in ogni caso) con incertezza di $2 \cdot 10^{-4}$.

[1] Questo esercizio è dovuto a Ugo Grimaldi

DOMANDE

Determinare il metodo di misurazione più idoneo, compatibilmente con gli strumenti disponibili, a perseguire gli scopi richiesti.

COMMENTI

- Il valore nominale del misurando è $100\,\mathrm{V} \cdot 200\,\Omega/\mathrm{V} = 20\,\mathrm{k}\Omega$.

- Nell'enunciare il secondo scopo della misurazione si richiede implicitamente di stimare l'incertezza di misura secondo il modello deterministico: infatti solo in questo caso ha senso parlare di indice di classe del voltmetro che si vuole realizzare. Ciononostante, nel corso dello svolgimento dell'esercizio sarà frequentemente consigliato, a mo' di esercizio, di stimare l'incertezza anche applicando il modello statistico.

- Con gli strumenti disponibili si possono adottare sostanzialmente quattro metodi di misurazione:
  - ”diretto”, con l'ohmetro;
  - con un metodo ”pseudo-voltamperometrico”, in cui il voltmetro è utilizzato come strumento di misura, essendo la sua resistenza interna il misurando;
  - con il ponte di Wheatstone, usando i resistori campione ed il milliamperometro per rilevare la condizione di azzeramento del ponte;
  - con il metodo della ”resistenza serie”, ossia misurando la stessa tensione (per comodità prossima al fondo scala) prima con il voltmetro da solo, poi ponendo una resistenza in serie ad esso (si può dimostrare che, per questa misurazione, la condizione ottimale è quella in cui il voltmetro misura intorno al 40% della scala (esercizio a pag. 41), il che richiede una resistenza in serie $R \approx 12\,\mathrm{k}\Omega$); in tal modo, dette V_0 la tensione misurata dal voltmetro da solo e V_1 quella misurata con la resistenza in serie, applicando la formula del partitore di tensione si ha:
    $V_1 = \frac{R_V}{R+R_V} V_0 \quad \Rightarrow \quad R_V = R\frac{V_1}{V_0 - V_1}$
    Ovviamente, affinché il metodo possa essere applicato, si richiede che la tensione misurata sia stabile, entro l'accuratezza richiesta, nell'intervallo tra le due misurazioni.

Per il primo scopo si può ritenere ragionevole conoscere il valore della resistenza interna del voltmetro con un'incertezza del 10% , trattandosi di una sorta di ”incertezza del second’ordine”. Si provi a verificarlo, sulla base delle seguenti indicazioni:

- si suppone di eseguire una misurazione voltamperometrica con il voltmetro connesso a valle; si suppone altresì che l’incertezza data dai due strumenti usati (voltmetro ed amperometro) sia complessivamente dell’ 1% ;
- l’incertezza del consumo $\epsilon_V = \frac{R_x}{R_V}$ sia anch’essa dell’ordine dell’1%, cosicché è necessario procedere ad una correzione dell’effetto dei consumi (vale a dire che il modello della misurazione deve essere modificato in modo da tenere in conto la resistenza interna del voltmetro).

Per il secondo scopo si può ritenere appropriato misurare la resistenza interna del voltmetro con un’incertezza relativa dell’ordine di 10^{-3}. Infatti:

- un voltmetro magnetoelettrico è realizzato con un milliamperometro in serie ad una resistenza campione molto stabile (in genere di manganina);
- il peso maggiore tra i contributi che determinano la classe dello strumento è quello del milliamperometro, quindi si può ritenere che nel caso in esame il milliamperometro sia in classe 0,4 e la restante incertezza sia dovuta alla resistenza [2] da $20\,\mathrm{k}\Omega$; il calcolo dell’incertezza su tale resistenza, che può quindi essere agevolmente effettuato facendo riferimento ai valori di fondo scala, conduce a ritenere che essa sia stata misurata dal costruttore con un’incertezza relativa dello $0,1\%$;
- il raddoppio della portata del voltmetro si ottiene aggiungendo in serie ad esso un’altra resistenza da $20\,\mathrm{k}\Omega$;
- non volendo degradare le prestazioni dello strumento, si deve usare una resistenza addizionale della stessa qualità di quella interna, ossia almeno con incertezza di 10^{-3};
- il nuovo voltmetro così ottenuto è quindi ancora in classe 0,5 se la resistenza interna è misurata con incertezza di 10^{-3}.

[2] Una simile ripartizione dell’incertezza può apparire irragionevole, nel senso che una resistenza di manganina può essere considerata di qualità molto superiore a quella citata. In realtà la resistenza interna del voltmetro è costituita da un resistore molto stabile (quello in manganina) in serie alla bobina, la quale, pur avendo un valore di resistenza molto più basso dell’altra, essendo di rame, ha una variabilità molto maggiore con la temperatura: ciò impedisce di assicurare il valore della serie di resistenze con un’accuratezza superiore a quella citata.

RISPOSTA

- Per il primo scopo proposto il metodo più adatto è quello ”diretto”, con l’ohmetro.

- Non è possibile conseguire il secondo scopo proposto con la sola strumentazione disponibile; si può però dire che, nell’ipotesi che il resistore addizionale esterno sia noto con incertezza relativa di 10^{-3}, il miglior metodo di misurazione adottabile, che è il ponte di Wheatstone, consente di realizzare un voltmetro di portata doppia in classe 1,5.

SOLUZIONE

Nello svolgimento dell’esercizio si seguirà passo per passo lo schema di produzione di una misurazione proposto a lezione, conducendo in parallelo l’analisi dei quattro metodi di misurazione consigliati.

Oggetto e scopo della misurazione

Nella programmazione di una misurazione il primo termine con cui confrontarsi è l’incertezza intrinseca del misurando. Nel caso di una resistenza, definita in corrente continua, due sono i principali fenomeni che concorrono all’incertezza intrinseca:

- le resistenze di contatto e collegamento;

- le variazioni di temperatura rispetto a quella di riferimento indicata per il misurando, in questo caso i $(20 \pm 1)\,°\mathrm{C}$ stabiliti dalle norme CEI per strumenti del tipo di quello in questione.

Nel caso in esame le resistenze di contatto e collegamento hanno influenza sempre trascurabile: infatti, anche nell’ipotesi di condizioni circuitali pessime, sono al massimo dell’ordine del decimo di ohm, che, confrontato con il valore del misurando, costituisce un’incertezza approssimativa di $5 \cdot 10^{-6}$.

Per il coefficiente di temperatura della manganina si può assumere il valore $\alpha \leq \pm 2 \cdot 10^{-5}°\mathrm{C}^{-1}$. Supponendo di effettuare la misura a $20°\mathrm{C}$ e nel campo di temperature ammesso, che è di $\pm 1°\mathrm{C}$, ci si attende una variazione relativa di resistenza di $\pm 2 \cdot 10^{-5}$, che è anch’essa trascurabile rispetto all’incertezza tollerata.

Si conclude pertanto che un modello del misurando adeguato a rendere possibile, almeno in linea di principio, la misurazione è: **il valore (unico) della resistenza interna di un voltmetro magnetoelettrico a** $(\mathbf{20 \pm 1})°\mathrm{C}$. Si può quindi proseguire con la pianificazione della misurazione.

Programmazione della misurazione

I diversi metodi di misura adottabili con la strumentazione disponibile sono stati già presentati.

Il metodo **”diretto”** usa come campioni per la misurazione quelli interni all’ohmetro (in strumenti come quello menzionato si tratta di solito di un campione di tensione e di un certo numero di campioni di resistenza: lo strumento esegue in realtà una misurazione di tipo voltamperometrico).

Il metodo **”pseudo-voltamperometrico”** usa come campioni materiali le molle di richiamo delle bobine interni ai due strumenti.

Il metodo a **ponte di Wheatstone** usa come campioni le resistenze del ponte.

Il metodo della **”resistenza serie”** usa come campioni materiali le molle di richiamo della bobina del voltmetro e la resistenza inserita in serie.

Con ciascuno dei quattro metodi si può evitare il ricorso a misurazioni ripetute, dal momento che le sorgenti di incertezza di natura aleatoria - le sole per cui abbia utilità un metodo di misurazione a letture ripetute - hanno rilevanza trascurabile nell’esperimento in questione.

La previsione dell’incertezza di misura porta, per i quattro metodi, ai seguenti risultati:

- **Ohmetro**

  Si può supporre che l’espressione ”tre cifre e mezza” faccia riferimento ad una indicazione massima sul *display* dello strumento del tipo *2999* o *1999* (entrambi i casi possono corrispondere a strumenti con indicazione ”tre cifre e mezza”). La portata dello strumento deve essere la minima superiore al valore nominale del misurando; essa sarà quindi, nei due casi, $29,99\,\mathrm{k}\Omega$ e $199,9\,\mathrm{k}\Omega$. La componente assoluta di incertezza ($\pm 1/;count$) vale quindi rispettivamente $\pm 10\,\Omega$ e $\pm 100\,\Omega$ ($\pm$ un’unità sull’ultima cifra letta sul *display*). La componente relativa di incertezza ($\pm 0,7\%\ della\ lettura$) è la stessa nei due casi e vale: $0,7\% \cdot 20\,\mathrm{k}\Omega = 140\,\Omega$.

  Si conclude che l’incertezza assoluta, con i due possibili ohmetri, è di $150\,\Omega$ o $240\,\Omega$, corrispondenti ad incertezze relative di $\mathbf{0,75}\%$ e $\mathbf{1,25}\%$.

- **Metodo pseudo-voltamperometrico**

  Occorre innanzi tutto scegliere la tensione di alimentazione del circuito in modo da minimizzare i contributi di incertezza degli strumenti utilizzati: come si vede la migliore scelta (se ne lascia per esercizio la dimostrazione formale) è un’alimentazione prossima a $100\,\mathrm{V}$, che porta il voltmetro a lavorare a fondo scala. In questo modo, però, la corrente che attraversa il milliamperometro è di $5\,\mathrm{mA}$, cosicché esso lavora a metà scala. L’incertezza relativa della misurazione può essere stimata con la formula (nel caso si adotti un modello deterministico; si lascia per esercizio la stima secondo il modello statistico):

$\epsilon_{R_V} = \epsilon_I + \epsilon_V = \frac{0{,}002 \cdot 10\mathrm{mA}}{5\mathrm{mA}} + \frac{0{,}005 \cdot 100\mathrm{V}}{100\mathrm{V}} \approx \mathbf{1\%}$

- **Ponte di Wheatstone**

  La formula per la stima dell'incertezza, secondo il modello deterministico, in una misurazione di resistenza con il ponte di Wheatstone (costituito dalle resistenze R_V, misurando, e R_1 , R_2 e R_3), trascurando altre cause di incertezza di ordine superiore grazie all'applicazione di opportune precauzioni circuitali ed operative (come spiegato a lezione), è:

  $\epsilon_{R_V} = \epsilon_{R_1} + \epsilon_{R_2} + \epsilon_{R_3} + \sigma$

  ove σ è la sensibilità del circuito, che può essere stimata per via teorica secondo quanto spiegato a lezione. Supponendo di realizzare il ponte in modo che sia, nominalmente, $R_V = R_1 = 20\,\mathrm{k\Omega}$ e $R_2 = R_3 = 1\,\mathrm{k\Omega}$ (così da massimizzare la sensibilità, pur mantenendo trascurabili gli effetti delle resistenze di contatto), si ottiene:

  $\sigma \approx 2R_V \frac{\mathrm{dI}}{E}$

  dove E è la tensione di alimentazione del ponte e dI è la minima deviazione dallo zero segnalata dal milliamperometro. Per il valore di quest'ultima si può assumere il valore dell'incertezza strumentale del milliamperometro, che vale $20\mu\mathrm{A}$.

  Si ottiene quindi:

  $\epsilon_{R_V} = 3 \cdot 2 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 20\,\mathrm{k\Omega} \frac{20\,\mu\mathrm{A}}{E} = 6 \cdot 10^{-4} + \frac{0{,}8\,\mathrm{V}}{E}$

  L'incertezza relativa ϵ_{R_V} dipende quindi dalla tensione di alimentazione del ponte. Nel caso in esame questa è a sua volta vincolata alla massima tensione sopportabile dal voltmetro, rappresentata dal suo valore di fondo scala $FS = 100\,\mathrm{V}$. Ne segue che la massima tensione di alimentazione dl ponte è $E = 200\,\mathrm{V}$, e dunque $\epsilon_{\mathbf{R_V}} \approx \mathbf{0,45\%}$.

- **Resistenza serie**

  La formula per la stima dell'incertezza, secondo il modello deterministico, è in questo caso:

  $\epsilon_{R_V} = \epsilon_R + \frac{\delta V}{V_0} \frac{1+\beta}{\beta - \beta^2}$

  ove δV è l'incertezza assoluta del voltmetro, determinata dalla sua classe, e β è il rapporto tra V_1 e V_0 (il cui valore, come si è detto, è circa $0,4$).

  L'incertezza relativa ottenibile è quindi $\epsilon_{\mathbf{R_V}} \approx \mathbf{3\%}$.

Si può quindi concludere la pianificazione della misurazione con la valutazione critica dell'adeguatezza dei metodi di misurazione adottabili agli scopi prefissi.

- **Primo scopo**

  Tutti i metodi di misurazione adottabili sono adeguati per il primo scopo (un'alimentazione minima di $8\,\mathrm{V}$ è necessaria per il ponte di Wheatstone): si sceglierà l'uso dell'ohmetro perché è quello di più semplice e rapida esecuzione.

- **Secondo scopo**

  Nessuno dei metodi realizzabili risulta efficace per misurare la resistenza interna del voltmetro con l'accuratezza richiesta. Benché a stretto rigore si debba concludere che la misurazione non può essere eseguita con la strumentazione disponibile, due interessanti considerazioni possono essere sviluppate:

  1. Il metodo che fornisce il risultato più prossimo a quello desiderato è il ponte di Wheatstone. Si può valutarne l'efficacia in modo più "tangibile" calcolando l'indice di classe del voltmetro di portata $FS = 200\,\mathrm{V}$ che si ottiene misurando R_V con tale metodo. Il nuovo voltmetro risulta costituito dal milliamperometro, dalla resistenza R_V e dal resistore addizionale; si ha perciò la relazione:

     $V_{letta} = (R_V + R)I$

     ove I è la corrente che attraversa il voltmetro ed il resistore addizionale. L'incertezza assoluta a fondo scala, secondo il modello deterministico, si può stimare come:

     $\delta V = I_{FS}(\delta R_V + \delta R) + (R_V + R)\delta I$

     ove I_{FS} è la corrente di fondo scala del milliamperometro, che vale $5\mathrm{mA}$, e δI è la sua incertezza strumentale, che è già stata calcolata e vale $20\,\mu\mathrm{A}$. Dal valore di δV così calcolato, detto $FS' = 200\,\mathrm{V}$ il fondo scala del voltmetro ottenuto, si ricava che la sua classe è:

     $cl = \frac{F}{S}' 100 \delta V \approx \mathbf{1,5}$

  2. L'esame della formula che esprime l'incertezza di misura per il ponte di Wheatstone consente d'altra parte di stabilire una possibile via da percorrere per rendere possibile il raggiungimento dello scopo prefisso: l'eccessivo valore dell'incertezza che si ottiene con tensioni di alimentazione del ponte "normali" è dovuto all'elevato valore di dI , mentre l'accuratezza dei resistori campione è invece adeguata allo scopo; pertanto l'acquisizione di un miglior rivelatore di zero offre la possibilità di ottenere il risultato richiesto. Detta ϵ_R l'incertezza relativa

con cui sono note le resistenze campione, la sensibilità amperometrica dI del nuovo rivelatore deve essere:
$\mathrm{d}I \leq (\epsilon_{R_V} - \epsilon_R) \frac{E}{2R_V} = 2\mu\mathrm{A}$

ESERCIZIO N 2
Resistenze in serie

Un esempio utile per verificare i diversi comportamenti dei metodi per esprimere l'incertezza viene da un semplice caso in cui si proceda alla creazione di un resistore di elevato valore a partire dalla serie di un numero opportuno di resistori di valore inferiore.

PROBLEMA

Determinare l'incertezza di un resistore da $10M\Omega$ ottenuto dalla serie di 10 resistori da $1M\Omega$

DATI

Resistori $1M\Omega \pm 1\%$

DOMANDE

Determinare l'incertezza del resistore da $10M\Omega$ in modo deterministico e con l'analisi statistica dell'incertezza.

COMMENTI

L'incertezza con cui sono caratterizzati i resistori è di tipo B e deve essere trattata di conseguenza.

RISPOSTE

- Incertezza calcolata in modo deterministico: 1%
- Incertezza calcolata in modo statistico ed ipotesi di distribuzione di probabilità rettangolare $0.18\%(1\sigma)$, nel caso di distribuzione triangolare $0.13\%(1\sigma)$

Soluzione

La prima operazione da compiere, sia si decida di operare secondo la logica statistica, sia si decida di operare secondo la logica deterministica, è esprimere la grandezza cercata in funzione delle grandezze misurate. In questo caso l'equazione è molto semplice, riconducendosi ad una semplice sommatoria:

$R_{tot} = \sum_{i=1}^{10} R_i$

Le derivate della funzione (ovvero i coefficienti c_i) sono parimenti semplici in quanto tutte unitarie.

Dal punto di vista deterministico quindi lo scarto massimo di R_{tot} è semplicemente pari alla somma degli scarti, che per ipotesi sono tutti uguali:

$\Delta R_{tot} = 10\Delta R_i$

Lo scarto massimo relativo di R_{tot} è quindi identico alla scarto massimo dei singoli resistori impiegati e quindi pari all'1%:

$\frac{\Delta R_{tot}}{R_{tot}} = \frac{10\Delta R_i}{R_{tot}} = \frac{10\Delta R_i}{10R_i} = \frac{\Delta R_i}{R_i}$

Dal punto di vista statistico l'incertezza tipo combinata di R_{tot} , nell'ipotesi che le incertezze che affliggono i singoli resistori siano indipendenti, è:

$u_c(R_{tot}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{10} u_c^2(R_i)}$

Per la determinazione dell'incertezza tipo combinata dei resistori è necessario ricorrere a informazioni a priori e quindi si è in presenza di una incertezza di tipo B, dichiarata nella forma: il valore è $R \pm a$. Come visto in precedenza, la definizione dello scarto tipo si basa su una scelta della distribuzione generalmente assunta di tipo rettangolare o triangolare.

Le due scelta portano ai seguenti risultati:

Distribuzione	Incertezza tipo	Incertezza tipo relativa
Rettangolare	$u_c(R_i) = \sqrt{\frac{a^2}{3}} = \sqrt{\frac{(0.01R_i)^2}{3}} = 5.8k\Omega$	$\frac{u_c(R_i)}{R_i} = 0.58\%$
Triangolare	$u_c(R_i) = \sqrt{\frac{a^2}{6}} = \sqrt{\frac{(0.01R_i)^2}{6}} = 4.1k\Omega$	$\frac{u_c(R_i)}{R_i} = 0.41\%$

L'incertezza tipo combinata di R_{tot} diventa quindi:

Distribuzione	Incertezza tipo comb.	Incertezza tipo relativa comb.
Rettangolare	$u_c(R_{tot}) = \sqrt{10u(R_i)^2} = 18k\Omega$	$\frac{u_c(R_{tot})}{R_{tot}} = 0.18\%$
Triangolare	$u_c(R_i) = \sqrt{10u(R_i)^2} = 12k\Omega$	$\frac{u_c(R_i)}{R_i} = 0.13\%$

Un confronto empirico dei risultati determinati nel caso di incertezza calcolata secondo il metodo deterministico e statistico si può ottenere determinando il fattore di copertura necessario per ottenere che l'incertezza tipo estesa sia espressa da un numero identico allo scarto massimo.

Distribuzione	Fattore di copertura per eguaglianza nei singoli resistori	Fattore di copertura per eguaglianza nel resistore somma	Rapporto tra i fattori di copertura
Rettangolare	1.7	5.5	3.2
Triangolare	2.4	7.6	3.2

In questo esempio, in cui compaiono incertezze tutte della stessa entità, il metodo di caratterizzazione statistica produce una contrazione dell'incertezza di una entità pari alla radice quadrata del numero dei termini coinvolti e quindi di circa tre volte. Se si fosse analizzata una serie di cento resistori, la riduzione sarebbe stata pari a dieci volte e così via.

L'osservazione che sorge spontanea è evidentemente: è corretto che l'incertezza continui a decrescere (indefinitamente) all'aumentare del numero di resistori? Evidentemente, se davvero si ipotizza che i contributi di incertezza siano indipendenti, la cosa è apparentemente ragionevole, ma è altrettanto ragionevole che:

- I resistori siano in qualche modo parenti tra loro, cioè ad esempio provengano da uno stesso costruttore e quindi il loro valore effettivo, pur se certamente compreso nella fascia dichiarata dal costruttore, appartenga ad una distribuzione che non è esattamente centrata sul valore medio.

- I resistori siano stati misurati per confronto con un campione che ha una sua propria incertezza, che però *è sempre la stessa (anche nel segno) per tutti i resistori*In altre parole è le incertezze che affliggono i resistori *non sono scorrelate*e dunque in luogo dell'equazione **??** deve essere impiegata la **??** in cui sono tenute in conto le correlazioni. L'effetto della correlazione è quello di porre un limite alla riduzione di incertezza ottenibile con il metodo statistico: se la correlazione fosse unitaria non si avrebbero riduzioni, con valori di correlazione tra uno e zero la riduzione cresce via via fino a raggiungere il valore precedentemente calcolato.

A questo punto però nasce il problema di conoscere (o determinare) la correlazione esistente tra i diversi resistori e questo può essere ottenuto:

- Tramite conoscenze a priori, ad esempio legate ai processi produttivi degli oggetti, al tipo di controlli di qualità cui i resistori sono sottoposti, al tipo di campione utilizzato per definire il loro valore, al fatto che i resistori appartengano tutti ad una stessa partita ovvero siano stati fabbricati in tempi diversi, ecc. Si tratta chiaramente di informazioni molto complesse e delicate, che richiedono una analisi assolutamente non facile.

- Tramite determinazione del fattore di correlazione per mezzo di misurazioni. Anche questo è un procedimento molto delicato, che passa attraverso la misurazione del valore dei resistori (e di altri resistori dello stesso tipo) al fine di evidenziare anomalie, come ad esempio un valore medio non corrispondente al centro della fascia. Però, se tali misurazioni sono fatte con il livello di accuratezza necessario, non vi è ragione di non impiegare i valori misurati in luogo di quelli nominali ed assegnare ad essi l'incertezza corrispondente alla misurazione effettuata, trasferendo così il problema su un altro piano.

Si può dunque concludere che il problema è di difficilissima soluzione e quindi, salvo casi particolarmente fortunati, l'unico consiglio che si può dare è quello di prestare estrema attenzione agli effetti per così dire secondari, ogniqualvolta una analisi od elaborazione statistica tende a ridurre in modo *considerevole* l'incertezza di una misura.

ESERCIZIO N 3
Incertezza di un partitore
I parte

Partitori vengono sovente impiegati per variare (diminuire) valori di tensione. L'incertezza del rapporto può essere molto piccola se il rapporto di partizione è prossimo ad uno.

PROBLEMA

Determinare l'incertezza del rapporto di attenuazione K ottenuto con un partitore di tensione.

DATI

- Partitore di tensione formato da due resistori R_1 ed R_2 connessi in serie. Uscita del partitore ai capi del resistore R_2
- Prima condizione $R_1 = 9900\Omega 1\%$ $R_2 = 100\Omega 1\%$
- Seconda condizione $R_1 = 100\Omega 1\%$ $R_2 = 9900\Omega 1\%$

DOMANDE

Determinare l'incertezza con cui si ottiene il rapporto di partizione nei due casi

COMMENTI

RISPOSTE

- Nel primo caso si ha $K = 0.01 \pm 0.8\%(1\sigma)$ (e 2% con il metodo deterministico)

- Nel secondo caso si ha $K = 0.99 \pm 0.008\%(1\sigma)$ (0.02% con il metodo deterministico)

Soluzione

Il modello a cui si fa riferimento è:

$$K = \frac{R_2}{R_1+R_2}$$

Quindi i valori richiesti del rapporto di partizione sono, nei due casi:

$$K_1 = 0,01$$
$$K_2 = 0,99$$

Il modello si presenta sotto forma di rapporto; ciò potrebbe far pensare di stimare l'incertezza semplicemente come:

$$x = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{Mod.deterministico :} & \epsilon_x = \epsilon_a + \epsilon_b \\ \text{Mod.statistico :} & \left(\frac{u(x)}{x}\right)^2 = \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(b)}{b}\right)^2 \end{array}$$

dove ϵ rappresenta l'incertezza relativa associata alla grandezza indicata a pedice.

Cio è SBAGLIATO! Le formule sono valide solo se a e b sono **indipendenti** , cosa che non si verifica nell'esempio in esame. In questo caso è quindi necessario procedere al calcolo dell'incertezza a partire dalla derivazione della formula che esprime la grandezza richiesta in funzione delle grandezze misurate (o di cui si conosce il valore). Si noti che però, come sovente accade, è possibile aggirare la necessità di calcolare esplicitamente le derivate della funzione purché si proceda ad alcune elaborazioni matematiche. Si tratta, in pratica, di eliminare la dipendenza reciproca di numeratore e denominatore; ciò si ottiene esprimendo il rapporto di partizione come:

$$K = \frac{1}{1+\frac{R_1}{R_2}}$$

A questo punto, prima di procedere alla stima dell'incertezza, giova ricordare le formule presentate a lezione valide per modelli di tipo somma:

$$x = a \pm b \Rightarrow \begin{array}{ll} \text{Mod.deterministico :} & \Delta x = \Delta a + \Delta b \\ \text{Mod.statistico :} & u_c(x)^2 = u^2(a) + u^2(b) \end{array}$$

dove Δ rappresenta l'incertezza assoluta associata alla grandezza indicata accanto.

Le formule presentate[3] si prestano bene alla stima dell'incertezza nel caso in

[3] L'importanza di disporre di formule che semplifichino i passaggi di calcolo (in questo caso

esame: l'unica accortezza richiesta è che le si applichi al modello riformulato nel modo indicato.

Secondo il modello **deterministico** si ha:

$$\epsilon_K = \epsilon_1 + \epsilon_{1+\frac{R_1}{R_2}} = \epsilon_{1+\frac{R_1}{R_2}} \leftarrow \epsilon_1 = \frac{\Delta 1}{1} = \Delta 1 = 0$$

dal che si può verificare che, come già dovrebbe essere noto, l'incertezza relativa associata ad una grandezza è uguale a quella associata al suo reciproco; lo stesso vale, naturalmente, se l'incertezza è stimata in modo statistico.

E, ricordando che $\Delta x = \epsilon_x x$, si ha che:

$$\begin{aligned} \epsilon_K &= \frac{\Delta\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}{1+\frac{R_1}{R_2}} = \frac{R_2}{R_1+R_2}\left(\Delta 1 + \Delta\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right) = \\ &= K\Delta\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = K\frac{R_1}{R_2}\epsilon_{\frac{R_1}{R_2}} = \frac{R_1}{R_1+R_2}\left(\epsilon_{R_1} + \epsilon_{R_2}\right) \end{aligned}$$

Quindi, sostituendo i valori numerici dati, si ha che:

$$\epsilon_{K,1} \approx 2\%$$
$$\epsilon_{K,2} = 0,02\%$$

Secondo il modello **statistico** si ha:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u_c(K)}{K}\right)^2 &= \left(\frac{u(1)}{1}\right)^2 + \left(\frac{u\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}{1+\frac{R_1}{R_2}}\right)^2 = \left(\frac{u\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)}{1+\frac{R_1}{R_2}}\right)^2 = \\ &= K^2\left(u^2(1) + u^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)\right) = \\ &= K^2 u^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right) = K^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\left(\frac{u^2(R_1)}{R_1^2} + \frac{u^2(R_2)}{R_2^2}\right) = \\ &= \frac{R_1^2}{(R_1+R_2)^2}\left(\frac{u^2(R_1)}{R_1^2} + \frac{u^2(R_2)}{R_2^2}\right) \end{aligned}$$

Quindi:

$$u_c^2(K) = \left(\frac{R_1 R_2}{(R_1+R_2)^2}\right)^2\left(\frac{u^2(R_1)}{R_1^2} + \frac{u^2(R_2)}{R_2^2}\right)$$

Da cui, sostituendo i valori numerici dati (e trattando l'incertezza sulle resistenze come contributo di tipo B, con distribuzione rettangolare), si ha che, grazie alla simmetria della formula ricavata rispetto ad R_1 ed R_2 , l'incertezza standard as-

eliminando il calcolo di derivate, che talora possono essere piuttosto complesse) non va trascurata: si vengono così a minimizzare le possibilità di errori di calcolo e di errori di battitura sulla calcolatrice quando si sostituiscono i valori numerici in formule complicate.

soluta è la stessa per ciascun valore di K :

$u_{c,1,2}(K) \approx 8 \cdot 10^{-5}$

Quindi:

$\frac{u_{c,1}(K)}{K} \approx 0,8\%$
$\frac{u_{c,2}(K)}{K} \approx 0,008\%$

ESERCIZIO N 4
Incertezza di un partitore
II parte

L'uso di resistori con comportamento simile nei confronti delle grandezze di influenza consente di minimizzare gli effetti di tali grandezze

PROBLEMA

Determinare l'incertezza del rapporto di attenuazione K ottenuto con un partitore di tensione.

DATI

- Partitore di tensione formato da due resistori R_1 ed R_2 connessi in serie. Uscita del partitore ai capi del resistore R_2
- Resistori $R_1 = R_2 = 5000\Omega 1\%$ a $20°\mathrm{C}$
- Coefficiente di temperatura dei resistori $\alpha = 0.4\%°\mathrm{C}^{-1} \pm 4 \cdot 10^{-4}°\mathrm{C}^{-1}$

DOMANDE

Determinare l'incertezza con cui si ottiene il rapporto di partizione nel caso di operazioni con temperature comprese tra $10°\mathrm{C}$ e $30°\mathrm{C}$

COMMENTI

RISPOSTE

$K = 0.5 \pm 0.4\% (1\sigma)$ ($\pm 1.4\%$ con il metodo deterministico)

Soluzione

Il modello a cui si fa riferimento è:

$$K = \frac{R_2(1+\alpha_2\Delta t)}{R_1(1+\alpha_1\Delta t)+R_2(1+\alpha_2\Delta t)}$$

Quindi il valore nominale (ossia a $20°\mathrm{C}$, per $\Delta t = 0$) del rapporto di partizione è:

$$K = 0,5$$

L'incertezza della misura di K, indipendentemente dal fatto che si usi un modello statistico o deterministico per la sua stima, consta di due contributi, uno legato all'incertezza sulle resistenze ed uno legato all'incertezza sui coefficienti di temperatura (si osserva che non è presente il termine di incertezza dovuto a Δt in quanto non si tratta di un valore misurato[4], ma del parametro in funzione delle cui variazioni si vuole valutare la variazione dell'incertezza di misurazione di K.

I due contributi citati possono essere confrontati, verificando che il secondo è trascurabile rispetto al primo.

A questo scopo si devono calcolare le derivate dell'equazione di modello rispetto ai quattro parametri ($R_1, R_2, \alpha_1, \alpha_2$), valutandone i valori in corrispondenza dei valori nominali dei parametri stessi, che sono forniti come dati del problema. Ponendo $R = R_1 = R_2$ e $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$, risulta per il modello deterministico:

$$\Delta K_R = \frac{1}{4}\frac{\Delta R_1+\Delta R_2}{R}; \qquad \Delta K_\alpha = \frac{1}{4}\frac{\Delta t(\Delta\alpha_1+\Delta\alpha_2)}{(1+\alpha\Delta t)}$$

Per il calcolo dei corrispondenti valori numerici, si può osservare che, trattandosi di un'operazione finalizzata alla stima dell'incertezza, è lecito compiere alcune approssimazioni (ed ovviamente lo stesso vale per il modello statistico); in particolare, se $\alpha\Delta t \ll 1$ (cosa che si verifica nel caso proposto), si ha che:

$$\Delta K_\alpha \approx \frac{1}{4}\Delta t(\Delta\alpha_1 + \Delta\alpha_2)$$

Quindi, poiché

[4]Ovviamente ci non significa che a Δt deve essere associata un'incertezza nulla: al contrario, dal momento che i suoi valori estremi costituiscono un'indicazione di massima dell'intervallo operativo di interesse, si deve ritenere che i risultati ottenuti svolgendo l'esercizio possano essere applicati anche a temperature ad essi vicine. Un'incertezza dell'ordine del 20% sui valori di Δt forniti può in questa fase essere considerata ragionevole.

$$\Delta R_1 = \Delta R_2 = 50\Omega$$
$$\Delta \alpha_1 = \Delta \alpha_2 = 4 \cdot 10^{-4\circ}\mathrm{C}^{-1}$$

si conclude che

$$\begin{array}{l} \Delta K_R \approx 5 \cdot 10^{-3} \\ \Delta K_\alpha \approx 2 \cdot 10^{-3} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \Delta K = \Delta K_R + \Delta K_\alpha = 7 \cdot 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta K}{K} = 1,4\%$$

Secondo il modello statistico si ha invece:

$$u^2_{c,R}(K) = \frac{u^2(R_1)+u^2(R_2)}{16R^2}$$

$$u^2_{c,alpha}(K) = \Delta t^2 \frac{u^2(\alpha_1)+u^2(\alpha_2)}{16R}$$

E, poiché

$$u^2(R_1) = u^2(R_2) \approx 833\Omega^2$$
$$u^2(\alpha_1) = u^2(\alpha_2) \approx 5,3 \cdot 10^{-8\circ}\mathrm{C}^{-2}$$

si conclude che

$$\begin{array}{l} u_{c,R}(K) \approx 2 \cdot 10^{-3} \\ u_{c,\alpha}(K) \approx 8 \cdot 10^{-4} \end{array} \quad \Rightarrow \quad u_c(K) = \left(u^2_{c,R}(K) + u^2_{c,\alpha}(K)\right)^{\frac{1}{2}} = 2,1 \cdot 10^{-3}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{u_c(K)}{K} \approx 0,4\%$$

ESERCIZIO N 5
Scelta di un metodo di misura
I parte

Sovente nell'esecuzione di una misura si è nella condizione di scegliere diverse configurazioni e strategie tutte idonee ad ottenere il risultato richiesto sebbene con diverse accuratezze. In questo esercizio si osserverà come diversi parametri, in genere secondari, possano condizionare la scelta del metodo migliore.

PROBLEMA

Misurare la corrente che fluisce in un circuito misurando la caduta di tensione che essa provoca ai capi di uno shunt. Sono disponibili due shunt di valore diverso ed un voltmetro elettronico.

DATI

- Voltmetro elettronico con fondo scala $FS = 1V; 10V; 100V$, accuratezza dichiarata dal costruttore nella forma $\Delta_V = 0.01\% lettura + 0.001\% FS$; resistenza di ingresso infinita
- Shunt tipo A: $R_A = 100\Omega$ accuratezza dichiarata dal costruttore $\epsilon_{R_A} = 0.01\%$
- Shunt tipo B: $R_B = 1000\Omega$ accuratezza dichiarata dal costruttore $\epsilon_{R_B} = 0.015\%$
- Valore nominale della corrente $1mA$

DOMANDE

Determinare l'incertezza con cui si misura la corrente utilizzando i due resistori di shunt e indicare quale di essi consente di ottenere l'incertezza minore.

COMMENTI

L'incertezza di misura del voltmetro è data con una formula binomia (termine assoluto più termine relativo). Con strumenti il cui l'incertezza sia data con formule di questo genere si ha una incertezza relativa complessiva che cresce al diminuire del valore letto a causa della presenza del termine assoluto, il cui peso relativo è maggiore quando si utilizza lo strumento all'inizio della scala. In questo esercizio, non avendo a disposizione portate inferiori ad $1V$, le condizioni di migliore impiego del multimetro saranno quelle con lo shunt di valore più elevato; d'altra parte lo shunt di valore più elevato, è affetto da un maggiore incertezza e quindi la decisione di quale configurazione utilizzare non è evidente prima di svolgere i calcoli.

RISPOSTE

- Impiegando lo shunt A si ha una incertezza (distribuzione rettangolare) pari a $\epsilon_I = 1.3 \cdot 10^{-4}(1\sigma)$ ($3 \cdot 10^{-4}$ con il metodo deterministico)
- Impiegando lo shunt B si ha una incertezza (distribuzione rettangolare) $\epsilon_I = 1.1 \cdot 10^{-4}$ ($2.6 \cdot 10^{-4}$ con il metodo deterministico)
- Conviene quindi impiegare lo shunt B che, pur essendo di qualità inferiore, porta il voltmetro elettronico a lavorare a fondo scala e quindi in condizioni migliori.

Soluzione

La prima operazione da fare è esprimere il misurando in funzione delle grandezze effettivamente misurate:

$$\hat{I} = \frac{V}{R}$$

L'espansione in serie di Taylor di tale formula è:

$$\Delta\hat{I} = \frac{1}{R}\Delta V - \frac{V}{R^2}\Delta R$$

L'incertezza sulla corrente espressa secondo il modello deterministico è:

$$\Delta\hat{I} = \frac{1}{R}\Delta V + \frac{V}{R^2}\Delta R$$

Dove nel caso si utilizzi lo shunt da 100Ω si ha:

$$\Delta V_{100} = 10^{-4} \cdot 0.1 + 10^{-5} \cdot 1 = 2 \cdot 10^{-5} V$$
$$\Delta R_{100} = 10^{-4} \cdot 100 = 0.01\Omega$$

Mentre per lo shunt da 1000Ω si ha:

$$\Delta V_{1000} = 10^{-4} \cdot 1 + 10^{-5} \cdot 1 = 1.1 \cdot 10^{-4} V$$
$$\Delta R_{1000} = 1.5 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 = 0.15\Omega$$

e quindi:

$$\Delta I_{100} = \frac{2 \cdot 10^{-5}}{1}00 + \frac{0.01 \cdot 0.1}{100^2} = 3 \cdot 10^{-7} V \Rightarrow \frac{\Delta I_{100}}{I} = 3 \cdot 10^{-4}$$
$$\Delta I_{1000} = \frac{1.1 \cdot 10^{-4}}{1}000 + \frac{0.15 \cdot 1}{1000^2} = 2.6 \cdot 10^{-7} V \Rightarrow \frac{\Delta I_{100}}{I} = 2.6 \cdot 10^{-4}$$

Se si impiega il modello statistico l'incertezza sulla corrente è invece:

$$u_c(\hat{I}) = \sqrt{\frac{u_c^2(V)}{R^2} + \frac{u_c^2(R)}{R^4}}$$

Per determinare la varianza e lo scarto tipo da associare alle letture di tensione e degli shunt si ricorre all'ipotesi di distribuzione rettangolare dell'incertezza e quindi:

$$u_c^2(V) = \frac{\Delta V^2}{3}; u_c^2(R) = \frac{\Delta R^2}{3}$$

e quindi:

$$u_{c100}^2(V) = \frac{(2 \cdot 10^{-5})^2}{3} = 1.3 \cdot 10^{-10} V^2 u_{c100}(R) = \frac{0.01^2}{3} = 33 \cdot 10^{-6} \Omega^2$$
$$u_{c1000}^2(V) = \frac{(1.1 \cdot 10^{-4})^2}{3} = 4 \cdot 10^{-9} V^2 u_{c1000}(R) = \frac{0.15^2}{3} = 7.5 \cdot 10^{-3} \Omega^2$$

L'incertezza diventa quindi:

$$u_{100}(I) = \left(\frac{1.3 \cdot 10^{-10}}{10^4} + \frac{33 \cdot 10^{-6} \cdot 0.1^2}{10^8}\right)^{1/2} = 0.13 \cdot 10^{-6} A \Rightarrow \frac{u_{c100}(I)}{I} = 1.3 \cdot 10^{-4}$$
$$u_{1000}(I) = \left(\frac{4 \cdot 10^{-9}}{10^6} + \frac{7.5 \cdot 10^{-3} \cdot 1^2}{10^{12}}\right)^{1/2} = 0.11 \cdot 10^{-6} A \Rightarrow \frac{u_{c1000}(I)}{I} = 1.1 \cdot 10^{-3}$$

La conclusione, quale che sia la metodologia di analisi dell'incertezza impiegata, è che conviene operare con lo shunt di valore più alto, che fa funzionare il voltmetro in modo migliore.

ESERCIZIO N 6
Scelta di un metodo di misura
II parte

In questo esercizio, prosecuzione del precedente si terranno gli effetti del consumo dello strumento, che possono alterare i risultati di un processo di misura anche in modo significativo.

PROBLEMA

Misurare la corrente che fluisce in un circuito misurando la caduta di tensione che essa provoca ai capi di un shunt. Sono disponibili due shunt di valore diverso ed un voltmetro elettronico di cui si conosce l'impedenza di ingresso.

DATI

- Voltmetro elettronico con fondo scala $FS = 1V; 10V; 100V$, accuratezza dichiarata dal costruttore $\epsilon_V = 0.01\% lettura + 0.001\% FS$; resistenza di ingresso del voltmetro dichiarata dal costruttore $R_i = 1M\Omega; \epsilon_{R_i} = 10\%$
- Shunt tipo A: $R_A = 100\Omega$ accuratezza dichiarata dal costruttore $\epsilon_{R_A} = 0.01\%$
- Shunt tipo B: $R_B = 1000\Omega$ accuratezza dichiarata dal costruttore $\epsilon_{R_B} = 0.015\%$
- Valore nominale della corrente $1mA$

DOMANDE

Determinare l'incertezza con cui si misura la corrente utilizzando i due resistori di shunt e indicare quale di essi consente di ottenere l'incertezza minore. Considerare l'effetto della resistenza di ingresso del voltmetro, che non si può assumere infinita, e procedere alla sua correzione.

COMMENTI

Essendo nota la resistenza di ingresso del voltmetro è possibile procedere alla correzione dei sui effetti introducendoli nella formula impiegata per il calcolo della corrente. Ovviamente la correzione non sarà completa, visto che la resistenza stessa è nota con una incertezza non trascurabile, ma si tratterà di un incertezza sulla correzione che, salvo casi anomali sarà minore degli altri contributi di incertezza in gioco.

RISPOSTE

- Incertezza impiegando lo shunt A $\frac{u_{c100}(I)}{I} = 1.3 \cdot 10^{-4}$ a 1σ e distribuzione rettangolare ($\epsilon_I = 3.1 \cdot 10^{-4}$ con il modello deterministico).
- Incertezza impiegando lo shunt B $\frac{u_{c1000}(I)}{I} = 1.2 \cdot 10^{-4}$ a 1σ e distribuzione rettangolare ($\epsilon_I = 3.6 \cdot 10^{-4}$ con il modello deterministico).
- I risultati ottenibili con i due metodi di calcolo dell'incertezza questa volta portano a conclusioni di tipo diverso ! Si noti come l'effetto della sommatoria quadratica legato al trattamento statistico dell'incertezza, di fatto elimini il contributo di incertezza connesso con il consumo dello strumento, almeno nel caso di resistenza inferiore.

ESERCIZIO N 7
Misura della componente alternata di un segnale

In questo esercizio si vedranno gli effetti sull'incertezza su una misurazione condotta sostanzialmente per differenza

PROBLEMA

Determinare la componente alternata a frequenza $100Hz$ presente nella tensione disponibile all'uscita di un sistema di raddrizzamento filtrato con un induttore serie. Si ha a disposizione un voltmetro magnetoelettrico ed uno elettrodinamico.

0.0.1 DATI

- Voltmetro magnetoelettrico: classe 0.5, fondo scala $100V$, 100 divisioni
- Voltmetro elettrodinamico: classe 1, fondo scala $100V$, 100 divisioni
- Lettura del voltmetro magnetoelettrico 80 div
- Lettura del voltmetro elettrodinamico 85 div

DOMANDE

Determinare il valore picco-picco della componente alternata e la sua incertezza

COMMENTI

- Gli strumenti magnetoelettrici sono intrinsecamente sensibili al valore medio della grandezza che viene loro applicata mentre gli strumenti elettrodinamici sono sensibili al suo valore efficace.

- L'indice di classe di uno strumento è un metodo per fornire una indicazione di incertezza assoluta, che viene riportata come percentuale del fondo scala dello strumento stesso e quindi classe 1 indica incertezza assoluta costante per tutte le letture pari all'uno percento del sondo scala.
- L'uscita di un sistema di raddrizzamento del tipo descritto si può esprimere come $V = V_m + V_p sin\omega t$.

RISPOSTE

Il valore picco-picco della componente alternata è $81V$ con una incertezza di $5.2V(1\sigma)$ pari a circa il 6.4% ($12.3V$ con il metodo deterministico pari a circa il 15%)

ESERCIZIO N 8
Errori nel ponte di Wheatstone
I parte

Il ponte di Wheatstone è largamente impiegato come sistema di zero per la determinazione di valori resistivi con elevata accuratezza.

PROBLEMA

Effettuare una misura di resistenza tramite un ponte di Wheatstone.

DATI

- Ponte di Wheatstone con i quattro lati formati in sequenza da R_1, R_2, Rx, R_c ed alimentazione connessa alle giunzioni $R_1 - R_c$ ed $R_2 - R_x$
- R_c resistore a sette decadi $10k\Omega; 1k\Omega; 100\Omega; 10\Omega; 1\Omega; 0.1\Omega$ accuratezza di ciascun resistore di ciascuna decade $\epsilon_{R_c} = 2 \cdot 10^{-4}$
- $R_1 = 100k\Omega \epsilon_{R_1} = 2 \cdot 10^{-4}$
- $R_2 = 1k\Omega \epsilon_{R_2} = 5 \cdot 10^{-6}$
- Rx resistore incognito
- Si ottiene l'azzeramento del ponte per $R_c = 12000.0\Omega$

DOMANDE

Determinare la il valore della resistenza incognita e la sua incertezza.

COMMENTI

Il resistore a decadi è un resistore in cui il valore complessivo viene ottenuto come somma di termini, inseriti tramite opportuni commutatori. Questa considerazione è importante nel trattamento statistico dell'incertezza.

0.0.2 RISPOSTE

Il resistore incognito vale 120Ω con incertezza $u_c(R_x) = 0.018\Omega 1\sigma$ (distribuzione rettangolare) pari a circa 0.015% (0.041% con il modello deterministico)

Il calcolo dell'incertezza espressa in forma statistica è stato fatto considerando scorrelate le incertezze dei resistori componenti la cassetta anche se *probabilmente*una qualche forma di correlazione tra di essi esiste (vedere primo esercizio).

ESERCIZIO N 9
Errori nel ponte di Wheatstone
II parte

Il ponte di Wheatstone è largamente impiegato come sistema di condizionamento per sensori di grandezze fisiche nei quali la traduzione è affidata ad una variazione di resistenza.

PROBLEMA

Effettuare una misura di temperatura utilizzando un resistore in platino PT100 montato in un ponte di Wheatstone.

DATI

- Ponte di Wheatstone come nell'esercizio precedente ma con Pt100 Pt in luogo di R_x
- Pt resistore al platino $R_{Pt0} = 100\Omega \pm 1 \cdot 10^{-2}\Omega a 0°\mathrm{C}$ con coefficiente di temperatura $\alpha = 4 \cdot 10^{-3} \pm 1 \cdot 10^{-5}°\mathrm{C}^{-1}$
- Si ottiene l'azzeramento del ponte per $R_c = 12000.0\Omega$

DOMANDE

Determinare la temperatura a cui si trova il PT100 e la incertezza della temperatura stessa.

COMMENTI

Nel trattamento statistico dell'incertezza si dispone già di una incertezza fornita sotto forma di scarto tipo dall'esercizio precedente. Si provi anche a impiegare una incertezza tipo determinata dal valore deterministico dell'esercizio precedente. Il valore è più grande di quello determinato partendo dall'inizio perché?

RISPOSTE

La temperatura è $50°\mathrm{C}$ con una incertezza di $0.087°\mathrm{C}(1\sigma)$ ($0.25°\mathrm{C}$ con il metodo deterministico)

ESERCIZIO N 10
Errori nel ponte di Wheatstone
III parte

In questa terza parte si terrà conto della presenza del galvanometro e dell'effetto della sensibilità finita

PROBLEMA

Effettuare una misura di temperatura utilizzando un resistore in platino PT100 montato in un ponte di Wheatstone.

DATI

- Ponte di Wheatstone come nell'esercizio precedente
- Sensibilità del galvanometro $10\mu V$ /div (si supponga infinita la resistenza interna).
- Alimentazione del ponte $10V$

DOMANDE

- Determinare la temperatura a cui si trova il PT100 e la sua incertezza tenedo conto della presenza del galvanometro
- La sensibilità del galvanometro è sufficiente ?
- Sarà possibile azzerare il ponte o sarà necessario interpolare ?

COMMENTI

RISPOSTE

- La temperatura è $50°\mathrm{C}$ come nell'esercizio precedente e l' incertezza è $0.087°\mathrm{C}(1\sigma)$ ($0.25°\mathrm{C}$ con il metodo deterministico) come nell'esercizio precedente
- La sensibilità del galvanometro consente di apprezzare variazioni di resistenza di temperatura di $0.03°\mathrm{C}$ e dunque la sensibilità è certamente sufficiente.
- La sensibilità del galvanometro corrisponde ad una variazione di R_c pari a 1.2Ω , valore che è ampiamente superiore alla risoluzione di R_c , che è 0.1Ω . Per questo motivo non ci sarà necessità di interpolare.

ESERCIZIO N 11
Misura di un carico induttivo ad alto $cos\phi$
I parte

Questo è il primo di quattro esercizi molto simili in cui le diverse combinazioni dei valori di resistenza e reattanza producono effetti molto diversi.

PROBLEMA

Misurare i parametri di un carico induttivo formato da un resistore in serie ad un induttore potendo eseguire prove sia in corrente continua sia in corrente alternata.

DATI

- Voltmetro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $10V$, 100 div.
- Amperometro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $1A$, 100 div.
- Wattmetro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $10W$, $cos\phi = 1$, 100 div.
- Letture in corrente continua: voltmetro 91.5 div; amperometro 100 div.
- Letture in corrente alternata: voltmetro 100 div, amperometro 100 div, wattmetro 91.5 div

DOMANDE

Determinare il valore di resistenza e reattanza ed impedenza del carico con la minore incertezza possibile

COMMENTI

:

- Le informazioni sono ridondanti; si tratta di scegliere il modo più corretto di impiegare i dati.
- Gli strumenti elettrodinamici forniscono una indicazione che è legata al valore efficace della grandezza misurata
- Il wattmetro fornisce una indicazione che vale $P = V \cdot I \cdot cos(\phi)$

RISPOSTE

Conviene ricavare la resistenza dalle misure in corrente continua ottenendo così $9.15\Omega \pm 0.43\%(1\sigma)$ (1.05% con il metodo deterministico). L'impedenza si può ricavare solo dalle grandezze alternate e vale $10\Omega \pm 0.4\%(1\sigma)$ (1% con il metodo deterministico). Il modo più conveniente di ricavare la reattanza è tramite l'impiego delle sole grandezze in corrente alternata con cui si ottiene $4\Omega \pm 2.7\%(1\sigma)$ (8% con il metodo deterministico). Impiegando anche le grandezze continue si otterrebbe invece $4\Omega \pm 3.4\%(1\sigma)$ (11.7% con il metodo deterministico).

ESERCIZIO N 12
Misura di un carico induttivo ad alto $cos\phi$
II parte

PROBLEMA

Misurare un carico induttivo formato da un resistore in serie ad un induttore avendo già determinato il valore di resistenza in precedenza.

DATI

- Voltmetro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $10V$, 100 div.
- Amperometro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $1A$, 100 div.
- Wattmetro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $10W$, $cos\phi = 1$, 100 div.
- Resistenza del carico $9.165\Omega \pm 0.1\%$
- Letture (in corrente alternata): voltmetro 100 div, amperometro 100 div, wattmetro 91.5 div

DOMANDE

Determinare il valore di reattanza ed impedenza del carico con la minore incertezza possibile

COMMENTI

Anche in questo esercizio le informazioni sono ridondanti; si tratta di scegliere il modo più corretto di impiegare i dati.

RISPOSTE

L' impedenza è la stessa dell'esercizio precedente e vale $10\Omega \pm 0.4\%(1\sigma)$ (1% con il metodo deterministico). Il modo più conveniente di ricavare la reattanza è questa volta a partire dall'impedenza tenendo conto del valore di resistenza. Si ottiene $4\Omega \pm 2.6\%(1\sigma)$ (6.8% con il metodo deterministico)

ESERCIZIO N 13
Misura di un carico induttivo a basso $cos\phi$
I parte

PROBLEMA

Misurare un carico induttivo formato da un resistore in serie ad un induttore potendo eseguire prove sia in corrente continua sia in corrente alternata.

DATI

- Voltmetro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $10V$, 100 div.
- Amperometro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $1A$, 100 div.
- Wattmetro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $10W$, $cos\phi = 1$, 100 div.
- Letture in corrente continua: voltmetro 40 div; amperometro 100 div.
- Letture in corrente alternata: voltmetro 100 div, amperometro 100 div, wattmetro 40 div

DOMANDE

Determinare il valore di resistenza, reattanza ed impedenza del carico con la minore incertezza possibile

COMMENTI

Le informazioni sono ridondanti; si tratta di scegliere il modo più corretto di impiegare i dati.

RISPOSTE

Conviene ricavare la resistenza dalle misure in corrente continua ottenendo così $4\Omega \pm 0.78\%(1\sigma)$ (1.75% con il metodo deterministico). La impedenza si può ricavare solo dalle grandezze alternate a vale $10\Omega \pm 0.41\%(1\sigma)$ (1% con il metodo deterministico). Il modo più conveniente di ricavare la reattanza è tramite l'impiego delle sole grandezze in corrente alternata con cui si ottiene $9.16\Omega \pm 0.44\%(1\sigma)$ (1.24% con il metodo deterministico)

ESERCIZIO N 14
Misura di un carico induttivo a basso $cos\phi$
II parte

PROBLEMA

Misurare un carico induttivo formato da un resistore in serie ad un induttore avendo già determinato il valore di resistenza in precedenza.

DATI

- Voltmetro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $10V$, 100 div.
- Amperometro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $1A$, 100 div.
- Wattmetro elettrodinamico classe 0.5 fondo scala $10W$, $cos\phi = 1$, 100 div.
- Resistenza del carico $4\Omega \pm 1 \cdot 10^{-5}$
- Letture (in corrente alternata): voltmetro 100 div, amperometro 100 div, wattmetro 40 div

DOMANDE

Determinare il valore di reattanza ed impedenza del carico con la minore incertezza possibile

COMMENTI

Anche in questo esercizio le informazioni sono ridondanti; si tratta di scegliere il modo più corretto di impiegare i dati.

RISPOSTE

L’ impedenza è la stessa dell’esercizio precedente e vale $10\Omega \pm 1\%$. Il modo più conveniente di ricavare la reattanza è questa volta a partire dalle sole misure in corrente alternata senza utilizzare il valore di resistenza preventivamente determinato. Si ottiene $9.16\Omega \pm 1.2\%$

ESERCIZIO N 15
Determinazione della resistenza interna di un voltmetro

In questo esercizio si osserveranno i problemi relativi all'ottimizzazione delle misure per differenza

PROBLEMA

Determinare la resistenza interna di un voltmetro tramite due misure a tensione fissa, una delle quali condotta ponendo in serie al voltmetro una resistenza di valore noto.

DATI

- Voltmetro $100V fs$ classe 0.5
- Resistenza interna dell'ordine di $100k\Omega$

DOMANDE

- Determinare il valore di resistenza serie che rende minima l'incertezza nella stima di R_i
- Determinare l'incertezza risultante nel caso migliore.

COMMENTI

Nella ricerca del valore ottimo si deve ricordare che esiste un solo grado di libertà; cioè, fissata la resistenza serie, il valore di tensione letto è univocamente determinato. Conviene esprimere tutto in funzione del rapporto tra la lettura con la resistenza serie inserita e quella senza.

RISPOSTE

- La lettura senza resistenza serie conviene sia fatta al fondo scala; la resistenza serie deve essere pari a $\sqrt{2}R_i$
- nelle condizioni migliori l'incertezza è circa il 3%

ESERCIZIO N 16 Dimensionamento di un partitore I parte

PROBLEMA

Costruire un divisore resistivo 1:2 (uscita metà dell'ingresso) usando due cassette a decadi identiche

DATI

- Cassetta a quattro decadi $1-10-100-1000\Omega$, ciascuna decade impostabile tra 0 e 9.
- Accuratezza delle decadi $1 \cdot 10^{-2}, 1 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-4}$ rispettivamente per le decadi $1, 10, 100, 1000\Omega$

DOMANDE

- Determinare i valori di resistenza da impostare sulle due decadi per avere il partitore più accurato
- Determinare l'incertezza del rapporto di partizione

COMMENTI

Esistono varie possibili combinazioni che producono la stessa accuratezza

RISPOSTE

- Le resistenze impostate sulle due cassette devono essere uguali. Dato che la decade da 1000Ω è la migliore conviene utilizzare solo quella; pertanto sono valide tutte le coppie tra $1000 - 1000\Omega$ e $9000 - 9000\Omega$
- L'incertezza del rapporto è $1 \cdot 10^{-4}$

ESERCIZIO N 17
Dimensionamento di un partitore
II parte

PROBLEMA

Costruire un divisore resistivo 1:2 usando due cassette a decadi identiche nell'ipotesi che ad esso sia applicato un carico variabile tra $R = \infty$ e $R = 100k\Omega$

DATI

- Cassetta a quattro decadi $1-10-100-1000\Omega$, ciascuna decade impostabile tra 0 e 9.
- Accuratezza delle decadi $1 \cdot 10^{-2}, 1 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-4}$ rispettivamente per le decadi $1, 10, 100, 1000\Omega$

DOMANDE

- Determinare i valori di resistenza da impostare sulle due decadi per avere il partitore più accurato
- Determinare l'incertezza del rapporto di partizione

COMMENTI

Essendo il carico variabile non è possibile impostare a priori il rapporto di partizione per ottenere il valore corretto.

RISPOSTE

- Le resistenze impostate sulle due cassette devono essere uguali. Tenendo conto dell'effetto del carico i due valori migliori sono le coppie $10 + 10\Omega$ e $100 + 100\Omega$
- L'incertezza del rapporto in entrambi i casi è $1 \cdot 10^{-3}$

ESERCIZIO N 18
Dimensionamento di un partitore
III parte

PROBLEMA

Costruire un divisore resistivo 1:10 usando due cassette a decadi con diverse caratteristiche

DATI

- Cassetta A a tre decadi $100 - 1000 - 10000\Omega$, ciascuna decade impostabile tra 0 e 9.
- Accuratezza delle decadi della cassetta A $2 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-4}, 1 \cdot 10^{-4}$ rispettivamente per le decadi $100, 1000, 10000\Omega$
- Cassetta B a tre decadi $100 - 1000 - 10000\Omega$, ciascuna decade impostabile tra 0 e 9.
- Accuratezza delle decadi della cassetta B $2 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-3}$ rispettivamente per le decadi $100, 1000, 10000\Omega$

DOMANDE

- Determinare i valori di resistenza da impostare sulle due decadi per avere il partitore più accurato
- Determinare la posizione migliore per la cassetta più accurata (verso il terminale comune o verso l'ingresso)
- Determinare l'incertezza del rapporto di partizione

COMMENTI

RISPOSTE

- Le resistenze impostate sulle due cassette devono essere in rapporto 9:1. Sono utilizzabili valori tra $1000 - 9000$ e $10000 - 90000$.
- La posizione della cassetta più accurata è ininfluente.
- L'incertezza del rapporto è $1 \cdot 10^{-4}$

ESERCIZIO N 19
Misura di una piccola resistenza
I parte

PROBLEMA

Si vuole misurare una piccola resistenza con un metodo volt-amperometrico ma gli strumenti disponibili sono poco adatti

DATI

- Voltmetro $1.2Vfs$, 240 div. classe 0.5
- Amperometro $1Afs$, 200 div. classe 0.5
- Resistenza da misurare circa $50m\Omega$

DOMANDE

Determinare l'incertezza con cui si determina la resistenza incognita

COMMENTI

Conviene utilizzare la massima corrente possibile per ridurre al minimo le incertezze

RISPOSTE

L'incertezza è circa 12.5%

ESERCIZIO N 20
Misura di una piccola resistenza
II parte

PROBLEMA

Si vuole misurare una piccola resistenza con un metodo volt-amperometrico, ma gli strumenti disponibile sono poco adatti; in particolare, il voltmetro è poco sensibile e lavora all'inizio della scala. Si decide quindi di inserire un resistore molto accurate in serie al misurando in modo da far lavorare il voltmetro vicino al fondo scala e quindi con piccoli errori.

DATI

- Voltmetro $1.2Vfs$, 240 div. classe 0.5
- Amperometro $1Afs$, 200 div. classe 0.5
- Resistenza da misurare circa $50m\Omega$
- Resistenza campione $1\Omega \pm 1 \cdot 10^{-4}$

DOMANDE

Determinare l'incertezza con cui si determina la resistenza incognita

COMMENTI

Non sempre quel che luccica è oro !

RISPOSTE

L'incertezza è circa 22.5%

ESERCIZIO N 21
Propagazione di grandi errori

Le tecniche di linearizzazione delle funzioni coinvolte nelle misurazioni condotte in modo indiretto consentono grandi semplificazioni nel calcolo della propagazione degli errori, ma devono essere usate sempre con cautela, specialmente in presenza di errori .. grandi..

PROBLEMA

Si vuole determinare la potenza assorbita da un bipolo ma si hanno a disposizione strumenti con campo di misura molto ampio in rapporto alle grandezze presenti nel circuito

DATI

- Si dispongono il voltmetro e l'amperometro per misurare rispettivamente la tensione ai capi del bipolo e la corrente in esso circolante
- Voltmetro classe 1 100 V f.s. 100 divisioni
- Amperometro classe 1 10 A f.s. 100 divisioni
- Lettura voltmetro 3 div.
- Lettura amperometro 4 div.

DOMANDE

Determinare il valore di potenza assorbita dal bipolo in modo che l'incertezza sia la minima possibile

COMMENTI

Gli errori sono molto grandi visto che gli strumenti lavorano all'inizio della scala. In questi casi può accadere che la linearizzazione applicata usualmente nella propagazione degli errori introduca di per sé errori inaccettabili. Se il sistema non è lineare è anche possibile che le fasce di incertezza siano dissimmetriche rispetto al valore nominale e quindi che questo valore, benché sembri il più naturale da usare, non sia quello che rende minima l'incertezza.

RISPOSTE

- Linearizzando si ottiene P = 1.2 W con incertezza 58 %
- Effettuando una analisi senza linearizzazione si ottengono P min 0.6 W e P max 2 W. Il risultato che rende minima l'incertezza espressa in modo simmetrico è quindi P = 1.3 W con incertezza 54 %
- Se non si modifica il valore centrale ma si mantiene 1.2 W l'incertezza massima raggiunge il 66 %

ESERCIZIO N 22
Errori nel ponte di Wheatstone
IV parte

Scopo di questo esercizio è l'analisi delle incertezze nel caso si debbano misurare piccole differenze rispetto ad un valore che non è necessario sia noto con grande accuratezza

PROBLEMA

Misurare variazioni di temperatura dell'ordine di $1°\mathrm{C}$ attorno ad un valore di $50°\mathrm{C}$ utilizzando un resistore in platino PT100 montato in un ponte di Wheatstone.

DATI

- Ponte di Wheatstone e Pt100 come negli esercizi precedenti
- La temperatura attorno a cui si lavora è $50°\mathrm{C}$
- La variazione di temperatura da misurare è $1°\mathrm{C}$

DOMANDE

- Con che incertezza è possibile misurare una variazione di temperatura di $1°\mathrm{C}$?.
- Le incertezze nella conoscenza dei parametri del PT100 influiscono sul risultato finale ?

COMMENTI

L'incertezza (in valore assoluto) che si consegue nella misura della temperatura è diversa da quella ottenuta negli esercizi precedenti perché in questo caso si effettua solo la misura di un incremento di una quantità anziché del suo valore totale. Molti strumenti e metodi di misura si comportano meglio in questa situazione. Fanno eccezione quei dispositivi caratterizzati da un errore assoluto costante lungo la scala (come ad esempio gli strumenti a indice)

RISPOSTE

- La misurazione si può effettuare con una incertezza di $6,6 \cdot 10^{-4}$°C
- L'incertezza nella conoscenza del valore di α non è più trascurabile

ESERCIZIO N 23
Resistenze in parallelo

PROBLEMA

Costruire un resistore da 950Ω avendo a disposizione due resistori fissi da 500Ω ed una cassetta a decadi

DATI

- Resistore fisso R_A valore nominale 500Ω , incertezza $2 \cdot 10^{-5}$
- Resistore fisso R_B valore nominale 500Ω incertezza $5 \cdot 10^{-5}$
- Cassetta a decadi valore massimo $100k\Omega$ risoluzione 1Ω incertezza $1 \cdot 10^{-3}$

DOMANDE

Determinare il valore da impostare sulla cassetta e l'incertezza del resistore ottenuto utilizzando tutte le possibili combinazioni di circuiti serie-parallelo.

COMMENTI

La cassetta a decadi ha una incertezza notevolmente superiore ai resistori fissi e quindi è assurdo utilizzarla da sola. Le altre tre possibili combinazioni danno risultati analoghi ma ovviamente non identici.

RISPOSTE

Vi sono sette configurazioni che producono il risultato richiesto: 1- cassetta usata da sola, impostata a 950Ω con incertezza finale $1 \cdot 10^{-3}$; 2- cassetta in serie a R_A , impostata a 450Ω con incertezza $4,84 \cdot 10^{-4}$; 3- cassetta in serie a R_B impostata a 450Ω con incertezza $5 \cdot 10^{-4}$; 4- cassetta in parallelo alla serie di R_A e R_B , impostata a 19000Ω con incertezza $8,32 \cdot 10^{-5}$; 5- cassetta in parallelo a R_A il tutto in serie a R_B , impostata a 4500Ω con incertezza $8,22 \cdot 10^{-5}$; 6- cassetta in parallelo a R_B il tutto in serie a R_A , impostata a 4500Ω con incertezza $7,92 \cdot 10^{-5}$, 7- cassetta in serie al parallelo di R_A ed R_B impostata a 700Ω con incertezza $7,46 \cdot 10^{-5}$