Considerazioni sull'incertezza nelle misure

1.1 Premessa

L'espressione dell'incertezza dei risultati di una misurazione è un problema cruciale nella scienza delle misure per la necessità di fornire informazioni relative alla qualità di una misura in ambienti e contesti fortemente diversi. Questa esigenza ha portato in passato alla proliferazione di tecniche, più o meno diffuse e più o meno accettate, in grado di evidenziare al meglio elementi, a torto o a ragione ritenuti prioritari, tipici di ogni ambito.

Sfortunatamente, la proliferazione di metodi ad hoc, se da un lato è utile per focalizzare l'attenzione sui problemi specifici, d'altro canto rende estremamente difficile sia operare un confronto tra strumenti ed apparecchi anche simili ma concepiti per impieghi in ambiti diversi, sia consentire una valutazione delle prestazioni effettive di un apparecchio da parte di personale non strettamente legato all'ambiente per cui lo strumento è stato concepito.

Per rispondere al desiderio di uniformità legato alla diffusione di strumentazione in ambiti sempre più vasti, la comunità internazionale ha attivato un gruppo di lavoro nell'ambito dell'ISO (International Standard Organisation) con lo scopo di preparare una raccomandazione per l'uso di una terminologia comune nella espressione dell'incertezza di una misurazione. Il gruppo di lavoro, insediatosi nel 1978, ha prodotto un documento, in inglese, nel 1980; tale documento è stato riconosciuto ed approvato dal CIPM (Comité International des Poides et Mesures) nel 1981 e successivamente nel 1986.

Attualmente è allo studio una traduzione in italiano del documento prodotto dal gruppo di lavoro dell'ISO, che viene curata dall'UNI (Ente Nazionale Italiano di Unificazione) per il tramite di una commissione mista UNI-CEI (Comitato Elettrotecnico Italiano). Ci si attende quindi che in tempi brevi la traduzione sia completata e che la raccomandazione sull'espressione dell'incertezza diventi anche una raccomandazione nel nostro Paese.

Le seguenti note sono basate sul documento dell'ISO e sono concepite come introduzione all'impiego di questa nuova metodologia.

Le note sono divise in due parti: inizialmente sono riportate, in forma estremamente succinta, le basi matematiche del metodo di espressione dell'incertezza, le formule fondamentali da impiegare ed alcune considerazioni che consentono di confrontare il metodo proposto con il metodo deterministico precedentemente impiegato.

In seguito sono proposti alcuni esercizi, in parte svolti ed in parte non svolti, ma con il risultato riportato, sui cui l'allievo può verificare il corretto apprendimento della metodologia ed effettuare confronti con i risultati che si sarebbero ottenuti determinando l'incertezza con i metodi un uso in precedenza.

1.2 Generalità sull'espressione dell'incertezza

1.2.1 Requisiti

I requisiti di un metodo per l'espressione dell'incertezza dovrebbero essere:

1. **Universalità** : il metodo dovrebbe essere applicabile a tutti i tipi di misurazione ed a tutti i tipi di dati in ingresso.

2. **Coerenza interna** : il metodo dovrebbe fornire il risultato (cioè il valore caratterizzante l'incertezza della misurazione) in modo diretto a partire dalle grandezze coinvolte e indipendentemente dal modo in cui queste grandezze sono raggruppate.

3. **Trasferibilità** : l'incertezza valutata per un processo di misura dovrebbe essere direttamente impiegabile come informazione necessaria a calcolare l'incertezza di un altro procedimento di misurazione che impieghi la grandezza stessa.

L'espressione dell'incertezza secondo la raccomandazione cui si fa riferimento rispetta tutti e tre i requisiti

1.2.2 Cause dell'incertezza

L'incertezza del risultato di una misurazione rende conto della imperfetta conoscenza del valore del misurando. Le principali fonti di incertezza che si possono ricordare sono:

1. Definizione incompleta del misurando.

2. Imperfetta realizzazione della definizione del misurando.

3. Non rappresentatività dell'oggetto nei confronti del misurando [1]

4. Non adeguata conoscenza degli effetti delle condizioni ambientali sulla misurazione ovvero imperfetta misurazione delle condizioni stesse.

5. Errori sistematici introdotti dall'operatore (ad esempio errori di lettura nel caso di strumenti analogici a indice).

6. Risoluzione strumentale finita.

7. Uso di valori non esatti per le costanti impiegate nell'algoritmo di elaborazione necessario ad ottenere il valore ipotizzato per il misurando.

8. Ipotesi non corrette od approssimazioni relative al procedimento sperimentale seguito per l'ottenimento della misura.

9. Variazioni nelle osservazioni del misurando ripetute in condizioni apparentemente identiche.

1.2.3 Classificazione delle incertezze

Il passato: errori sistematici ed aleatori

In passato sono stati usati vari criteri per la suddivisione delle incertezze in categorie omogenee secondo criteri volta a volta legati alle diverse applicazioni.

Uno dei criteri più diffusi, che qui viene citato perché può generare incertezza nell'uso delle note seguenti, è quello basato sulla distinzione tra errori sistematici ed errori aleatori.

Secondo questa divisione, gli errori sistematici sono quelli che agiscono sul risultato della misurazione sempre allo stesso modo e quindi polarizzano i risultati della misurazione stessa. Gli errori aleatori invece, sempre secondo la vecchia divisione, sono i responsabili delle variazioni osservate in misure ripetute che si ipotizzano a media nulla proprio perché casuali.

Secondo questa logica dunque gli errori sistematici possono (o potrebbero) essere eliminati applicando una opportuna correzione, mentre l'effetto degli errori aleatori può (o potrebbe) essere ridotto (... a piacere) con una operazione di media su un numero elevato (... a piacere) di misurazioni.

Un tipico esempio di errore "sistematico", che veniva citato normalmente, il cosiddetto "errore di consumo" causato sia dallo strumento stesso, che non con-

[1] Il misurando è una grandezza o manifestazione di una proprietà di un oggetto misurato, che, per varie cause, può non essere rappresentativo della grandezza che si intende ricavare.

sente di effettuare misurazioni nelle condizioni ”ideali” che si sarebbero ”volute” realizzare[2], sia da altri strumenti impiegati per una misurazione indiretta [3].

Chiaramente questa impostazione, anche se rispondeva ad una logica semplice e di immediata comprensione, poneva non pochi problemi quando, ad esempio, portava come conclusione al fatto che, corretti gli errori sistematici e mediate moltissime letture, l’incertezza finale si riduceva a valori prossimi a zero con conclusioni quindi non realistiche. Per ovviare a questa incongruenza si introducevano altri concetti legati all’incertezza intrinseca del misurando, a non meglio specificati errori sistematici non identificati, ecc.. con conseguente introduzione di soggettività sovente intollerabili.

Il presente: incertezze di tipo A e di tipo B

La tendenza attuale, recepita ormai dalla gran parte dei laboratori, è quella di:

- Abolire il concetto di errore sistematico sul risultato di una misurazione: se esiste un fattore che influenza la misurazione stessa se ne tiene conto *direttamente nella formula che esprime la misurazione stessa*, rimuovendo così ogni influenza che possa alterare in modo noto la misurazione.

- Considerare (a seguito della operazione precedente) che la misurazione sia corretta, anche se ovviamente affetta da incertezza (non più da errore). Si considera dunque implicitamente che siano stati corretti *tutti*gli effetti sistematici (significativi) che influiscono sulla misurazione e che siano stati fatti tutti gli sforzi possibili per individuarli.

  Le incertezze sono dunque tutte vagamente assimilabili a quelle che in passato erano indicate come aleatorie e dunque per esse è ragionevole impiegare una trattazione statistica, che le descriva in termini di valore medio (nullo per definizione, dato che gli effetti sistematici sono stati tutti eliminati) e di varianza (o scarto quadratico medio) che diventa il elemento quantificante l’incertezza del risultato di una misurazione.

  Una distinzione tra le diverse cause di incertezza permane ma è legata al modo in cui si ottengono informazioni sull’incertezza stessa. Si distinguono due categorie denominate A e B.

---

[2] Ad esempio si consideri il caso di un voltmetro con resistenza di ingresso finita con cui si vorrebbe misurare la tensione a vuoto di un dispositivo con resistenza di uscita non nulla: l’inserzione dello strumento altera il valore di tensione misurato di fatto impedendo la realizzazione di una delle condizioni di misura (misura a vuoto).

[3] Ad esempio si consideri il caso del consumo di un voltmetro con resistenza di ingresso finita posto a valle di un amperometro in una misurazione volt-amperometrica: la corrente letta dall’amperometro la somma della corrente assorbita dal carico e della corrente assorbita dal voltmetro.

A	incertezza che si quantifica tramite osservazioni condotte da misurazioni ripetute
B	incertezza che si quantifica a partire da informazioni esterneovvero note a priori (ad esempio fornite da terze parti o dal costruttore di uno strumento di misura)

E' fondamentale ricordare che sia per incertezze di tipo A sia per incertezze di tipo B, la caratterizzazione deve essere fatta in termini statistici[4] in modo da potere in seguito ottenere una indicazione compatta dell'incertezza che soddisfi i requisiti esposti all'inizio dei questa nota.

Come già accennato, nel caso di incertezze di tipo A la caratterizzazione statistica si effettua a partire da una analisi fondata su misurazioni ripetute cioè su un approccio statistico di tipo frequenzistico; nel caso di incertezze di tipo B invece la caratterizzazione statistica si fonda su un approccio basato sulla fiducia che si ha nelle informazioni disponibili. Entrambi gli approcci corrispondono a visioni della statistica ben definite e ormai universalmente accettate per le quali quindi non è necessario introdurre altre ipotesi o limitazioni.

Inoltre, una volta in possesso dell'indicatore statistico del valore dell'incertezza, il suo uso prescinde da come è stato calcolato e quindi anche dal fatto che l'incertezza fosse di tipo A oppure B.

Simbologia

La decisione di trattare tutte le incertezze con metodi statistici implica la necessità di assimilare tutte le misurazioni a elementi di una popolazione, di cui in generale si cerca il valore sperato (media) in presenza di una incertezza legata alla dispersione degli elementi. Diventa quindi necessario distinguere tre concetti diversi:

– il singolo risultato di una misurazione, elemento della popolazione di misurazione che si desidera caratterizzare. Per il singolo risultato si utilizzeranno caratteri maiuscoli (ad esempio X , M_1 , ecc.). In generale, anche quando si parlerà di più misurazioni, si ometterà, tutte le volte che ciò è possibile, il pedice corrente (identificativo della i-esima misura): il simbolo X_i non deve essere quindi inteso come l' i-esima

[4] I metodi per ottenere informazioni in forma corretta, in presenza di incertezze di tipo B espresse secondo modelli deterministici sono descritti in seguito.

misurazione della grandezza X , ma come l' i- esima grandezza del tipo X

– La stima del risultato della misurazione ovvero la stima del valore sperato, che sarà indicato con la lettera minuscola corrispondente alla lettera maiuscola utilizzata per la grandezza corrispondente (esempio x sarà la stima del valore sperato, cioè della media della popolazione di misurazioni indicate con X), che si determina come:

$$x = \frac{1}{N}\sum_{N} X \tag{1.1}$$

in cui si è omesso il pedice indicativo della k-esima misurazione.

– La media della popolazione talvolta indicata con lettera greca (ad esempio μ), caratteristica intrinsecamente non determinabile in modo esatto e che può solo essere stimata dal valore x .

1.2.4 Caratterizzazione delle incertezze in termini statistici

Trattazione delle incertezze di tipo A

Le incertezze di tipo A si analizzano sulla base dei risultati di successive misurazioni della stessa grandezza per cui conviene richiamare le formule fondamentali per la determinazione di media, varianza, ecc. nel caso di campioni di elementi di una popolazione.

Dato un insieme di osservazioni q_k di una grandezza q la stima $\bar{q}$ della media μ della popolazione è

$$\bar{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k \tag{1.2}$$

La varianza σ^2 della popolazione viene stimata dalla varianza sperimentale $s^2(q_k)$ come:

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{n}(q_k - \bar{q}) \tag{1.3}$$

La radice quadrata (positiva) $s(q_k)$ della varianza viene denominata scarto tipo sperimentale

A partire dalla varianza sperimentale è possibile determinare la migliore stima possibile della varianza della media che vale:

$$s^2(\bar{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \tag{1.4}$$

Da cui si può infine determinare lo scarto tipo sperimentale della media che è la radice quadrata positiva della varianza sperimentale della media.

Pertanto, ricordando che X_k è la k-esima grandezza (e non la k-esima misurazione di una grandezza), se una grandezza X_k è determinata a partire da una serie n di misurazioni (indipendenti):

- la stima della grandezza è $x_k = \bar{X}_k$
- l'incertezza u della stima è $u(x_k) = s(\bar{X}_k)$ ed è calcolata secondo i dettami dell'equazione 1.4

Per un uso corretto di queste tecniche di stima è necessario osservare che:

- Il numero di osservazioni impiegate per la determinazione della dispersione della popolazione deve essere ragionevole per fornire una buona stima della popolazione stessa cioè deve essere rappresentativo della popolazione.
- Nel caso le osservazioni siano in numero ridotto e nel caso si sappia a priori che la distribuzione della popolazione è normale, è possibile impiegare la distribuzione t di student per il calcolo della dispersione della popolazione.
- Il numero di gradi di libertà delle stime effettuate (che vale $n - 1$ nel caso descritto) dovrebbe sempre essere specificato per consentire una completa valutazione dell'incertezza.
- Se le n osservazioni non sono indipendenti le stime proposte possono non essere corrette, in questo caso si devono usare stimatori specifici, adattati alla realtà su cui si sta operando (ad esempio la varianza di Allan).
- Se si trattano contemporaneamente più grandezze può essere necessario tenere conto della correlazione tra le variabili per mezzo della loro covarianza. Se due grandezze q ed r sono misurate n volte, la covarianza stimata dei valori medi stimati vale:

$$s(\bar{q}, \bar{r}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (q_k - \bar{q})(r_k - \bar{r}) \tag{1.5}$$

Trattazione delle incertezze di tipo B

La stima della varianza di una grandezza x_k derivata da una grandezza X_k , che non è stata ottenuta a partire da osservazioni ripetute deve essere valutata per mezzo di un giudizio scientifico a partire da tutte le informazioni disponibili sulla possibile variabilità di X_k . Le informazioni possono provenire ad esempio da:

- dati di misurazioni precedenti;
- esperienza, ovvero informazioni pregresse sul comportamento e sulle proprietà di strumenti o materiali impiegati;
- specifiche tecniche del costruttore;
- dati provenienti da certificati di taratura o prodotti simili;
- incertezze assegnate a valori di riferimento (costanti) prese da manuali o altre fonti.

La valutazione di una incertezza di tipo B è quindi una operazione che richiede estrema cautela ed una notevole esperienza, che può essere acquisita solo con la pratica.

Nel trattamento delle incertezze di tipo B possono verificarsi alcune situazioni che vale la pena di analizzare separatamente e per le quali è possibile indicare suggerimenti per la corretta valutazione dell'incertezza:

- Si dispone di una indicazione dell'incertezza (fornita da terze parti, in genere dal costruttore di uno strumento) espressa in forma di varianza, o scarto quadratico medio (o un multiplo dichiarato di queste grandezze). E' la situazione ottimale, che in futuro si auspica diventi comune, ma che oggi difficilmente si incontra: non sono richieste elaborazioni o ipotesi particolari (salvo eventualmente la divisione per il fattore moltiplicativo specificato)
- Si dispone di una indicazione dell'incertezza in termini di ampiezza di un intervallo di fiducia (o confidenza) (ad esempio 90%, 95% o 99%). Se è ragionevole ipotizzare che la distribuzione dei dati sia normale (ovvero che il sia stata utilizzata questa ipotesi per determinare l'intervallo di fiducia!) è possibile risalire all'incertezza espressa sotto forma di scarto tipo dividendo il valore disponibile per un opportuno coefficiente desumibile dall'andamento della distribuzione normale (1.64 per intervallo di fiducia 90%; 1.96 per intervallo di fiducia 95% e 2.58 per intervallo di fiducia 99%). E' evidente che discorsi analoghi possono essere fatti se viene dichiarata una diversa distribuzione di

probabilità applicando i coefficienti moltiplicativi opportuni, ma l'uso di distribuzioni diverse dalla normale è una eventualità molto remota.

- Si dispone di affermazioni del tipo è altamente probabile che i valore X_k giaccia all'interno di un intervallo compreso tra a^- e a^+ (ovvero, in termini più rozzi, il valore (vero) della misurazione *è*compreso tra a^- e a^+). In questo caso il passaggio da una indicazione dell'incertezza di tipo deterministico ad una basata sullo scarto tipo può essere fatta ipotizzando una distribuzione ragionevole. Si possono analizzare tre casi tipici che possono essere adattati a molti casi pratici e che sono sintetizzati nella tabella seguente.

Tipo di distribuzione	Scarto tipo corrispondente	Usare quando...
Rettangolare	$u^2(x_i) = \frac{(a^+-a^-)^2}{1}2$	Non si dispone di informazioni tali da far presumere ci siano valori privilegiati all'interno dell'intervallo
Triangolare	$u^2(x_i) = \frac{(a^+-a^-)^2}{2}4$	Da usare se il valore centrale è decisamente più probabile di tutti gli altri
Trapezoidale identificata dal parametro β per cui la base minore è $\beta(a^+ - a^-)$ e dunque $\beta = 1$ implica distribuzione rettangolare e $\beta = 0$ implica distribuzione triangolare.	$u^2(x_i) = \frac{(a^+-a^-)^2 \cdot (1+\beta^2)}{2}4$	Da usare se è ragionevole ipotizzare che la probabilità di ottenere valori vicini agli estremi del campo ammesso sia piccola

- Si dispone della classica indicazione il risultato è $R \pm a$ in cui il $\pm$ è inteso nel senso del caso precedente. Anche in questo caso si possono avere tre situazioni tipiche analoghe al caso precedente con simili risultati che sono sintetizzati nella tabella seguente.

Tipo di distribuzione	Scarto tipo corrispondente
Rettangolare	$u^2(x_i) = \frac{a^2}{3}$
Triangolare	$u^2(x_i) = \frac{a^2}{6}$
Trapezoidale identificata dal parametro β per cui la base minore è $2\beta a$ e dunque $\beta = 1$ implica distribuzione rettangolare e $\beta = 0$ implica distribuzione triangolare.	$u^2(x_i) = \frac{a^2 \cdot (1+\beta^2)}{6}$

1.2.5 Il fattore di copertura

Talvolta risulta necessario esprimere l'incertezza di una misurazione in termini di intervallo di fiducia. In questo caso si introduce una incertezza tipo estesa che si ottiene dall'incertezza tipo tramite l'applicazione di un fattore di moltiplicazione k detto fattore di copertura, che usualmente assume un valore compreso tra due e tre.

Se una misurazione è dichiarata impiegando l'incertezza estesa è necessario indicare esplicitamente il valore utilizzato per il fattore di copertura, diversamente non è possibile impiegare correttamente il valore fornito come dato per calcolare una nuova incertezza per misurazioni successive (viene cioè meno il requisito della trasferibilità)

1.2.6 Riassunto della nomenclatura sulle incertezze

I principali termini fino ad ora introdotti sono dunque:

- La media di una serie di misure ripetute, anche chiamata valore sperato o valore atteso, che è il valore da assegnare al misurando.

- La varianza sperimentale dei dati, che è la stima della varianza della popolazione

- La varianza sperimentale della media dei dati

- Lo scarto tipo sperimentale della media dei dati, anche denominato incertezza tipo (sperimentale) dei dati, che è il valore di incertezza con cui si caratterizza il risultato della misurazione.

- L'incertezza tipo (sperimentale) estesa, ottenuta dall'incertezza tipo (sperimentale) tramite l'applicazione di un opportuno fattore di copertura. L'attributo sperimentale è indicato tra parentesi perché viene sovente omesso per alleggerire la notazione.

1.3 Determinazione del valore atteso e dell'incertezza di una misurazione (indiretta)

1.3.1 Determinazione del valore atteso

Una generica misurazione indiretta [5]si ottiene elaborando una o più misurazioni (dirette o ottenute indirettamente da altre elaborazioni) tramite un "modello"

Detta Y la grandezza da determinare per via indiretta e $X_1, X_2 ... X_N$ le N grandezze coinvolte a qualunque titolo nel calcolo di Y , esisterà una relazione funzionale f tale che:

$$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \tag{1.6}$$

La stima y del valore della grandezza Y si otterrà quindi, secondo l'equazione 1.6, a partire dalle stime $x_1, x_2 ... x_N$ le N grandezze coinvolte nel calcolo di y

$$y = f(x_1, x_2, ..., x_N) \tag{1.7}$$

Dove, coerentemente con la simbologia introdotta nel capitolo precedente, le stime dei valori delle grandezze coinvolte si ottengono come:

$$x_i = \bar{X}_i = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} X_{i,k} \tag{1.8}$$

dove $X_{i,k}$ è la k-esima misurazione della i-esima grandezza.

Si noti che, in alternativa al metodo indicato, si potrebbe ottenere la stima del valore sperato y della popolazione di Y come:

$$y = \bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} Y_k \tag{1.9}$$

essendo ogni Y_k determinato direttamente a partire dalla formula 1.6. I due metodi per ottenere il valore atteso y danno lo stesso risultato nel caso la funzione f , che esprime il modello, sia lineare nelle grandezze X . Se ciò non accade, le stime del valore atteso di y sono in generale diverse, anche se si deve sottolineare che la differenza *deve*essere *molto*contenuta: una elevata differenza, ad esempio dovuta a modelli fortemente non lineari accompagnate da dispersioni elevate dei

[5]Secondo il parere di molti studiosi *tutte*le misurazioni sono indirette essendo comunque sempre necessaria una forma di elaborazione dei risultati di una misura. La questione è molto controversa, e lungi dall'essere risolta; in seguito comunque si considererà *diretta*una misurazione fornita direttamente da uno strumento come ad esempio il valore di una tensione ottenuta direttamente da un voltmetro ed *indirette*tutte le altre misurazioni, che richiedano elaborazioni coinvolgenti una o più misurazioni dirette.

valori delle singole X , è il sintomo che la misurazione non è condotta in modo corretto dato che le singole realizzazione Y sono necessariamente molto diverse perché la situazione descritta si verifichi.

1.3.2 Determinazione dell'incertezza nel caso di grandezze di ingresso statisticamente indipendenti

Nel caso tutte le grandezze X_k che intervengono nella determinazione di una grandezza Y siano statisticamente indipendenti, l'incertezza tipo combinata $u_c(y)$ di y (stima di Y) è la radice quadrata positiva della varianza combinata $u_c^2(y)$ che si calcola come:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_x^2 u^2(x_i) \tag{1.10}$$

dove f è la funzione con cui si calcola Y , N sono le grandezze coinvolte e $u_i(x)$ sono le incertezze tipo delle singole grandezze, calcolate come descritto nei paragrafi precedenti e $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_x$ sono le derivate parziali della funzione f rispetto alle diverse grandezze x_i calcolate nel punto $x_1, ..., x_N$.

La varianza combinata è dunque la somma di tanti termini quante sono le grandezze coinvolte nella determinazione di y : ogni termine è il prodotto di un coefficiente, che dipende dalla forma della funzione f , per la varianza associata alla grandezza coinvolta. Questo suggerisce di riscrivere la 1.10 nella forma:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) \tag{1.11}$$

dove le $c_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$ sono interpretabili come coefficienti di sensibilità di y nei confronti delle diverse grandezze e nel punto di lavoro.

1.3.3 Determinazione dell'incertezza nel caso di grandezze di ingresso statisticamente correlate

Nel caso le grandezze di ingresso siano statisticamente correlate tra loro è necessario modificare la 1.10 per tenere conto degli effetti della correlazione. La formula da impiegare diventa:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_x^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j) \tag{1.12}$$

dove $u(x_i, x_j) = u(x_j, x_i)$ è la covarianza stimata associata alla coppia di grandezze x_i x_j .

Il grado di correlazione (stimato) delle due grandezze è caratterizzato dal coefficiente di correlazione (stimato) $r(x_i, x_j)$ che può assumere valori tra meno uno ed uno e che è definito come:

$$r(x_i, x_j) = \frac{u(x_i, x_j)}{u(x_i)u(x_j)} \tag{1.13}$$

La 1.12 può dunque essere riscritta come:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j) \tag{1.14}$$

in cui si riconosce la parte, sempre presente, legata alla varianza delle singole grandezze e la parte, di correzione della stima, legata alla presenza di correlazione tra le diverse grandezze.

1.3.4 Riassunto dei passi necessari per la determinazione dell'incertezza

In conclusione i passi necessari per la valutazione dell'incertezza associata ad una misurazione sono:

1. Esprimere matematicamente la relazione che lega il misurando Y alle grandezze di ingresso X_i .

   $$Y = f(X_1, X_2, ..., X_N) \tag{1.15}$$

   La relazione deve tenere conto di tutte le correzioni che possono essere necessarie a ridurre l'incertezza della misurazione.

2. Determinare il valore x_i di stima delle grandezze di ingresso tramite più misurazioni oppure a partire da informazioni esterne (es certificati di taratura, ecc.).

3. Valutare l'incertezza tipo $u(x_i)$ di ciascuna stima delle grandezze di ingresso applicando il trattamento appropriato (tipo A o B a seconda della grandezza).

4. Valutare l'eventuale esistenza di correlazione tra le grandezze di ingresso.

5. Calcolare il risultato della misurazione applicando la funzione f alle stime delle grandezze di ingresso x_i .

6. Determinare l'incertezza tipo combinata $u_c(y)$ applicando la formula generale:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j) \tag{1.16}$$

   (nel caso le covarianze siano non influenti la formula può essere semplificata)

7. Se richiesto applicare il fattore di copertura per il calcolo della incertezza tipo estesa

8. Riportare il risultato della misurazione indicando il valore stimato, l'unità di misura e l'incertezza (o eventualmente l'incertezza estesa *assieme*al fattore di copertura). Nell'indicare l'incertezza, se la misurazione è di elevata qualità, può essere necessario riportare anche l'elenco delle correzioni applicate, il tipo di distribuzioni ipotizzate per le incertezze di tipo B, il numero di gradi di libertà, ecc.

1.3.5 Considerazioni finali sul trattamento statistico dell'incertezza

Una volta esaurita la discussione della trattazione statistica delle incertezze può essere interessante fare alcune considerazioni rispetto al metodo tradizionale di trattazione dell'incertezza, che faceva riferimento agli scarti massimi e alla combinazione peggiore delle incertezze stesse.

In formula si aveva cioè:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i = \sum_{i=1}^{N} |c_i| \, \Delta x_i \tag{1.17}$$

essendo Δx_i lo scarto massimo della grandezza x_i (corrispondente ad una fascia di valori tra $x_i - \Delta x_i$ e $x_i + \Delta x_i$.

Mentre ora con il trattamento statistico delle incertezze si ha:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j r(x_i, x_j) u(x_i) u(x_j) \tag{1.18}$$

Le due equazioni hanno aspetto simile differendo nel fatto che:

- Gli scarti massimi Δx_i sono sostituiti dalle incertezze tipo combinate $u_c(x_i)$

- La sommatoria (lineare) dei valori assoluti è sostituita da una sommatoria quadratica.

Il primo punto è in effetti filosoficamente molto importante, ma, se si pensa di ricavare l'incertezza tipo per estrapolazione dallo scarto massimo (trattando l'incertezza stessa come di tipo B) i due valori, a meno di un fattore di scala ($1/\sqrt{3}$), sono dello stesso tipo.

Il secondo punto, cioè l'uso di sommatorie quadratiche in luogo delle sommatorie lineari (di moduli) ha invece almeno quattro implicazioni notevoli:

- La sommatoria quadratica è sempre minore della sommatoria lineare quindi *l'incertezza determinata per via statistica tende ad essere espressa da un numero inferiore*(comunque la si valuti) a quello che esprimeva l'incertezza determinata nel metodo proposto in passato. La differenza diventa notevole quando le grandezze di ingresso sono molte mentre è meno significativa per misurazioni semplici. In altre parole, il fattore di copertura da impiegare per ottenere che le incertezze siano espresse dallo stesso numero cresce (sovente oltre limiti ragionevoli !) al crescere delle grandezze coinvolte.

- La riduzione dell'incertezza valutata per via statistica rispetto a quella valutata per via deterministica corrisponde al fatto, ragionevolmente condivisibile a buon senso, che *statisticamente*la possibilità che *tutti*i contributi di incertezza agiscano sul risultato con il massimo valore possibile e con lo stesso segno è estremamente remota.

- Se davvero tutte le incertezze agissero sul risultato della misurazione nello stesso senso, saremmo in presenza di una evidente correlazione tra le grandezze stesse. Ed infatti, se tutte le correlazioni $r(x_i, x_j)$ fossero pari a $+1$ l'equazione 1.18 diventerebbe:

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} c_i^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} c_i c_j u(x_i) u(x_{j)} = \left(\sum_{i=1}^{N} c_i u(x_i)\right)^2 \qquad (1.19)$$

  e dunque le formule impiegate per il calcolo dell'incertezza in forma deterministica coinciderebbe (almeno apparentemente) con quella usata per il calcolo in forma statistica. Si noti che permarrebbe comunque la differenza dovuta all'impiego degli scarti massimi in luogo delle incertezze tipo.

- All'estremo opposto, non esistono, a stretto rigore, casi in cui la correlazione tra le grandezze d'ingresso è perfettamente nulla; al massimo, in casi in cui essa sia sufficientemente piccola, il suo contributo all'incertezza può essere trascurabile. Ciò deve, ovviamente, essere valutato di volta in volta ed una precisa valutazione quantitativa di validità generale non è possibile: si può però dire che nella maggior parte dei casi pratici un coefficiente di correlazione superiore al 10% 15% dà luogo ad effetti non trascurabili[6]

I primi esercizi proposti consentiranno di apprezzare meglio questi effetti.

[6]Si noti che, purtroppo, la correlazione non trova espressione esplicita nel modello della misurazione e deve essere determinata preliminarmente e con un processo indipendente. In pratica, molto spesso accade di dover ricorrere a conoscenze *a priori*sui fenomeni fisici coinvolti e sul modo in cui sono state determinate le incertezze delle grandezze d'ingresso: questo è uno dei punti cruciali in cui assume particolare peso l'esperienza e la sensibilità di chi compie e controlla il processo di misurazione.