Misurazione e Strumentazione

Alessio Carullo

7 maggio 2002

Indice

Capitolo 1

Introduzione alla misurazione

1.1 Importanza della misurazione

La **misurazione**, ossia l'esecuzione di un procedimento che permette di ottenere informazioni quantitative sulle manifestazioni di un sistema fisico, è un'operazione che ogni essere umano esegue più volte al giorno, spesso in modo inconsapevole, applicando schemi mentali acquisiti. La misurazione è infatti alla base di tutti gli scambi commerciali, in quanto è spesso necessario stabilire la quantità (dimensione di terreni o fabbricati, massa di prodotti alimentari, volume di carburanti, ...) e la qualità (grammatura di fogli di carta, resistenza a trazione di tondini di ferro impiegati nel cemento armato, parametri parassiti di componenti elettronici, ...) dei prodotti scambiati.

La misurazione riveste inoltre un ruolo di estrema importanza in campo tecnico, sia nell'ambito industriale sia in quello scientifico. È indispensabile, per esempio, misurare la resistenza elettrica dei resistori prodotti da un'industria di componenti elettronici per poter stabilire la conformità del processo produttivo a criteri di qualità prestabiliti. D'altra parte, l'attività scientifica non avrebbe senso se non fosse sostenuta da risultati di misurazioni[1], in quanto la conoscenza di un sistema fisico o la validazione di un modello inteso a rappresentarlo sono subordinate alla misurazione di alcune sue manifestazioni.

Una condizione fondamentale per l'utilizzo del risultato di una misurazio-

[1]Possiamo conoscere qualcosa dell'oggetto di cui stiamo parlando solo quando possiamo compiere su esso misure al fine di descriverlo mediante numeri; in caso contrario la nostra conoscenza è scarsa e insoddisfacente (Lord Kelvin, 1883)

ne in un ampio contesto geografico (regionale, nazionale od internazionale) è l'esistenza di un accordo che definisca le **unità di misura** da adottare per le differenti grandezze, ossia i termini di riferimento convenzionali impiegati per confrontare grandezze della stessa specie, e stabilisca quali dispositivi (**campioni materiali**) sono impiegati per riprodurre uno o più valori delle unità di misura definite. Lo stesso accordo deve inoltre stabilire le modalità per il calcolo dell'**incertezza di misura** (intorno limitato del valore della grandezza misurata che esprime la qualità della misura) e per la determinazione dell'intervallo di valori che rappresenta la misura stessa, così da poter confrontare misure ottenute in contesti differenti e valutarne la **compatibilità**. In assenza di un simile accordo, può essere utile stabilire i criteri da adottare per eseguire la conversione tra unità di misura differenti (ad esempio da gradi faranheit a gradi celsius, da pollici a centimetri, da libbre a grammi, ...).

Il prodotto della misurazione, che è detto **misura**, è un'informazione che deve comprendere il valore del **misurando** (grandezza sottoposta a misurazione), l'incertezza di misura e l'unità di misura.

1.2 Il procedimento conoscitivo sperimentale

Nel paragrafo 1.1 si è evidenziato il fatto che la conoscenza di un sistema fisico richiede la misurazione di manifestazioni di grandezze del sistema osservato. Le misure ottenute sono solitamente impiegate per identificare i **parametri** di un **modello** matematico del sistema oppure per validare un modello costruito a partire da informazioni note a priori. Di seguito si descrive brevemente il processo logico, detto procedimento conoscitivo sperimentale, che attraverso l'esecuzione di misurazioni permette di raggiungere la conoscenza del sistema osservato.

Il procedimento, rappresentato schematicamente nella figura 1.1, richiede almeno le fasi di *quantizzazione* e di *interpretazione*. Nella fase di quantizzazione, alle grandezze Gi osservate sono associati valori discreti Ni, multipli di quantità elementari, che esprimono l'entità delle grandezze Gi[2]. L'interpretazione dei valori numerici Ni porta alla conoscenza del sistema.

In alcuni casi, le manifestazioni delle grandezze osservate sono scomode da misurare, per cui si ricorre alla *trasduzione*, che permette di ottenere

[2]Si osservi che il fenomeno di discretizzazione avviene anche nel dominio del tempo, in quanto le grandezze sono necessariamente osservate in particolari istanti.

manifestazioni facilmente misurabili ($G1'$ e $G2'$ nella figura 1.1). Esempi di trasduzione sono la conversione di una temperatura in un segnale elettrico di tensione mediante l'impiego di una termocoppia, oppure l'attenuazione di una corrente elettrica dell'ordine del centinaio di ampere ad una dell'ordine di alcuni ampere mediante l'uso di un trasformatore di corrente. Il dispositivo che esegue la conversione della grandezza osservata è detto **trasduttore**.

Spesso è inoltre conveniente ricorrere all'*elaborazione* dei valori numerici ottenuti dal procedimento di quantizzazione, in modo da ottimizzarne il contenuto di informazione ($N2'$ ed $N3'$ nella figura 1.1). Esempi di impiego dell'elaborazione sono l'applicazione di metodi di misurazione indiretti (vedi 2.2.2), l'estrazione di un parametro rappresentativo da un segnale variabile nel tempo, come nel caso del calcolo del valore efficace di un segnale alternato, oppure la correzione dell'effetto di non idealità che intervengono nelle fasi di trasduzione e quantizzazione.

1.2.1 Le grandezze misurate

Finora è stato utilizzato il termine *grandezza* per indicare la generica entità del sistema osservato. tuttavia risulta conveniente suddividere le grandezze in categorie.

Una prima classificazione delle grandezze, basata sulla loro definizione, permette di individuare due categorie principali:

- **grandezze fisiche** definite mediante modelli legati alle leggi della fisica (ad esempio la lunghezza ed il tempo);

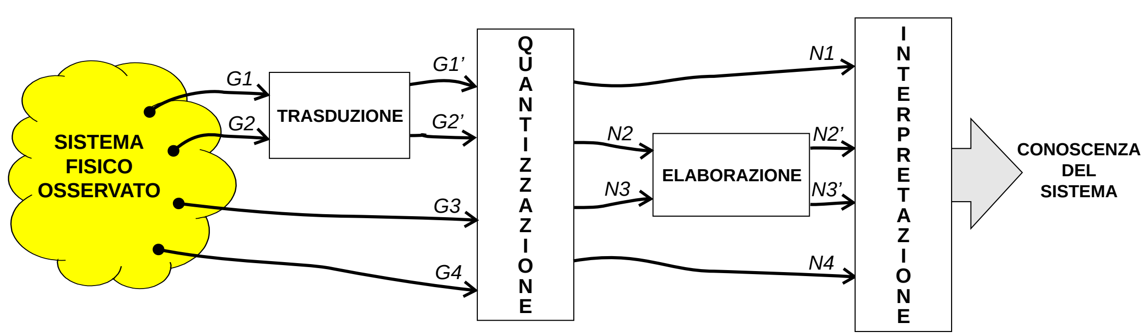

Figura 1.1: *Il procedimento conoscitivo sperimentale.*

- **grandezze convenzionali** definite in base alla modalità di misurazione (ad esempio la durezza Brinnel).

Un altro tipo di classificazione può essere ottenuta tenendo conto del modo di esprimere le grandezze. In questo caso si individuano le seguenti categorie:

- **grandezze razionali** espresse mediante numeri razionali che rappresentano il rapporto tra la grandezza misurata e la corrispondente unità di misura (ad esempio la lunghezza e la massa);

- **grandezze numerali** espresse da numeri interi positivi che rappresentano la numerazione di oggetti od eventi (ad esempio il numero di abitanti di una città oppure il numero di colpi di *clock* di una base tempi in un determinato intervallo di tempo);

- **grandezze complesse** espresse mediante un insieme ordinato di numeri relativi rispetto ad un sistema di riferimento assegnato (ad esempio la posizione di un punto nello spazio rispetto ad una terna di assi cartesiani e l'impedenza di un dispositivo elettrico espressa in termini di parte reale e parte immaginaria);

- **grandezze strumentali** espresse mediante una corrispondenza rispetto a punti di scale convenzionali (ad esempio la durezza Brinnel, Vickers e Rockwell e la rugosità);

- **grandezze selettive** espresse come riconoscimento di appartenenza ad una certa classe (ad esempio la pezzatura di ghiaia determinata mediante setacci o le grandezze oggetto di misurazioni compiute mediante strumenti a soglia).

1.3 Diagramma di produzione di una misura

Il processo logico che **deve** essere eseguito da chi si appresta ad eseguire una misurazione è detto *diagramma di produzione di una misura* e comprende le fasi di progettazione, esecuzione e presentazione dei risultati, come mostrato nello schema delle figure 1.2 e 1.3.

Il primo passo della fase di progettazione di una misura (figura 1.2) consiste nello stabilire lo scopo per cui si esegue la misurazione. Ciò è di fondamentale importanza per poter fissare l'incertezza richiesta I_R, che deve essere adeguata allo scopo.

Si fornisce quindi la definizione del misurando, indicando chiaramente le grandezze che individuano lo **stato del sistema** misurato. Questa definizione fissa un limite inferiore all'incertezza con cui il misurando può essere stimato, che è detta **incertezza intrinseca**.

Se l'incertezza richiesta è minore dell'incertezza intrinseca I_I, il misurando non è stato definito in modo adeguato allo scopo della misurazione: l'incertezza intrinseca può essere ridotta solo affinando il modello che definisce il misurando, ad esempio considerando un numero maggiore di parametri per definire lo stato del sistema misurato oppure controllando e/o misurando meglio questi parametri[3].

Se, per esempio, il sistema in misura è un resistore la cui resistenza deve essere misurata con un'incertezza dell'ordine di 1 Ω, è probabilmente sufficiente definire il misurando come la resistenza presente ai due morsetti del resistore affinché l'incertezza intrinseca sia minore di questo valore è necessario definire il misurando a quattro morsetti e devono essere note la temperatura e l'umidità dell'ambiente in cui si trova il resistore.

infatti essere definito in modo diverso in base più o meno completo a seconda Per lo stesso sistema in misura si possono infatti definire

A partire da queste definizioni è possibile valutare con quale incertezza minima può essere stimato il misurando

incertezza intrinseca del misurando, ossia la minima incertezza con cui

.

Quando la definizione del misurando è adeguata all'incertezza richiesta, si procede alla scelta del **metodo di misurazione**, cioè si specificano le procedure operative, le apparecchiature e le tecniche di elaborazione impiegate per l'esecuzione della misurazione. Si individuano quindi le **grandezze di influenza** significative, ossia quelle grandezze che alterano le caratteristiche delle apparecchiature impiegate e/o l'interazione tra il sistema misurato e le apparecchiature stesse. Si stabilisce il campo di variazione ammesso, in base all'incertezza richiesta, per le grandezze di influenza e, quando è necessario,

[3] Il limite per l'incertezza intrinseca del misurando è solitamente imposto da vincoli di tipo economico, in quanto la complicazione della definizione del misurando comporta un aumento dei parametri da considerare ed un affinamento delle tecniche di misura o di controllo di tali parametri.

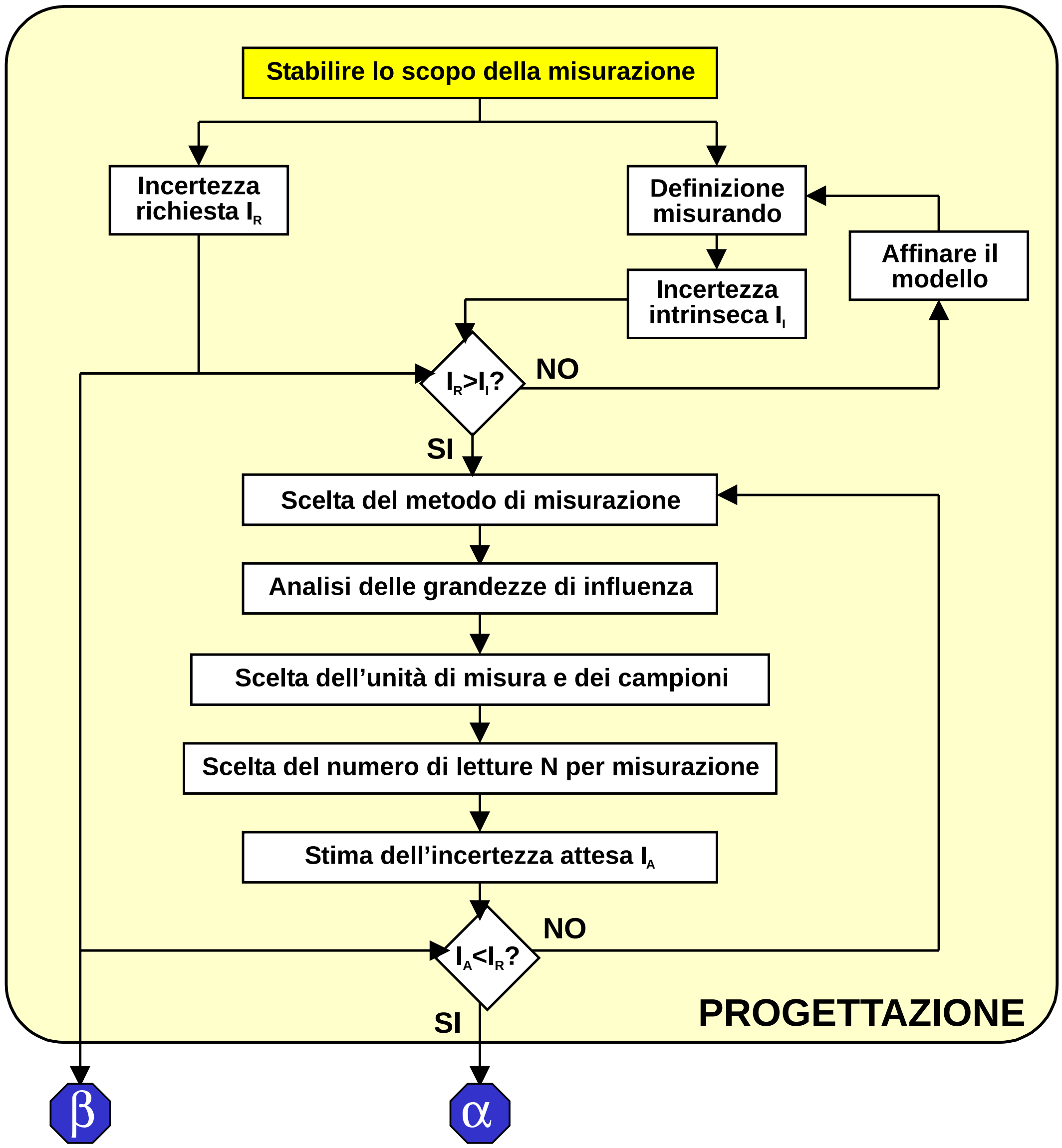

Figura 1.2: *Il diagramma di produzione di una misura - la fase di progettazione.*

si fissa l'incertezza con cui una o più grandezze di influenza devono essere misurate o controllate.

Il passo successivo consiste nella scelta dell'unità di misura da adottare e dei campioni che riproducono uno o più valori della grandezza misurata. Nel caso in cui si voglia ricorrere ad un metodo di misurazione a letture ripetute, per esempio per ridurre mediante un opportuno modello probabilistico l'influenza del rumore sull'incertezza di misura, si decide il numero N di letture da effettuare per ogni misurazione.

Le scelte fatte consentono a questo punto di eseguire una stima dell'incertezza attesa I_A, in base alle caratteristiche delle apparecchiature e dei campioni impiegati, al contributo delle grandezze di influenza ed alle tecniche di elaborazione adottate. Se questa incertezza è maggiore dell'incertezza richiesta, è necessario ricorrere ad un altro metodo di misurazione, oppure impiegare campioni che garantiscono prestazioni migliori oppure formulare richieste più stringenti per le grandezze di influenza.

La fase di esecuzione della misurazione (figura 1.3) prevede innanzitutto la realizzazione dello schema di misurazione e del campione locale dell'unità di misura adottata. Il confronto tra il misurando e la grandezza riprodotta dal campione locale fornisce la **lettura**; nel caso di misurazione a letture ripetute, questo confronto sarà ripetuto N volte come stabilito durante la fase di progettazione. Al termine della misurazione si effettua la stima della dispersione D delle N letture ottenute: se D è maggiore dell'incertezza richiesta è necessario ricorrere a campioni locali più stabili e riesaminare l'effetto delle grandezze di influenza, che devono probabilmente essere meglio controllate e/o misurate. Se invece la dispersione D è adeguata all'incertezza richiesta, si procede al calcolo dell'incertezza di misura I_O ottenuta: se questa risulta inferiore all'incertezza richiesta si passa alla fase di presentazione dei risultati, altrimenti si deve migliorare la realizzazione del campione locale dell'unità di misura ed il controllo delle grandezze di influenza.

La presentazione dei risultati di una misurazione deve essere svolta con particolare attenzione, altrimenti si rischia di perdere parte dell'informazione ottenuta, spesso a caro prezzo, durante le fasi precedenti. L'informazione deve essere chiara e completa: è importante eliminare qualunque causa potenziale di ambiguità o arbitrarietà.

Il risultato della misurazione deve essere comunicato sempre mediante le seguenti tre informazioni:

1. valore del misurando;

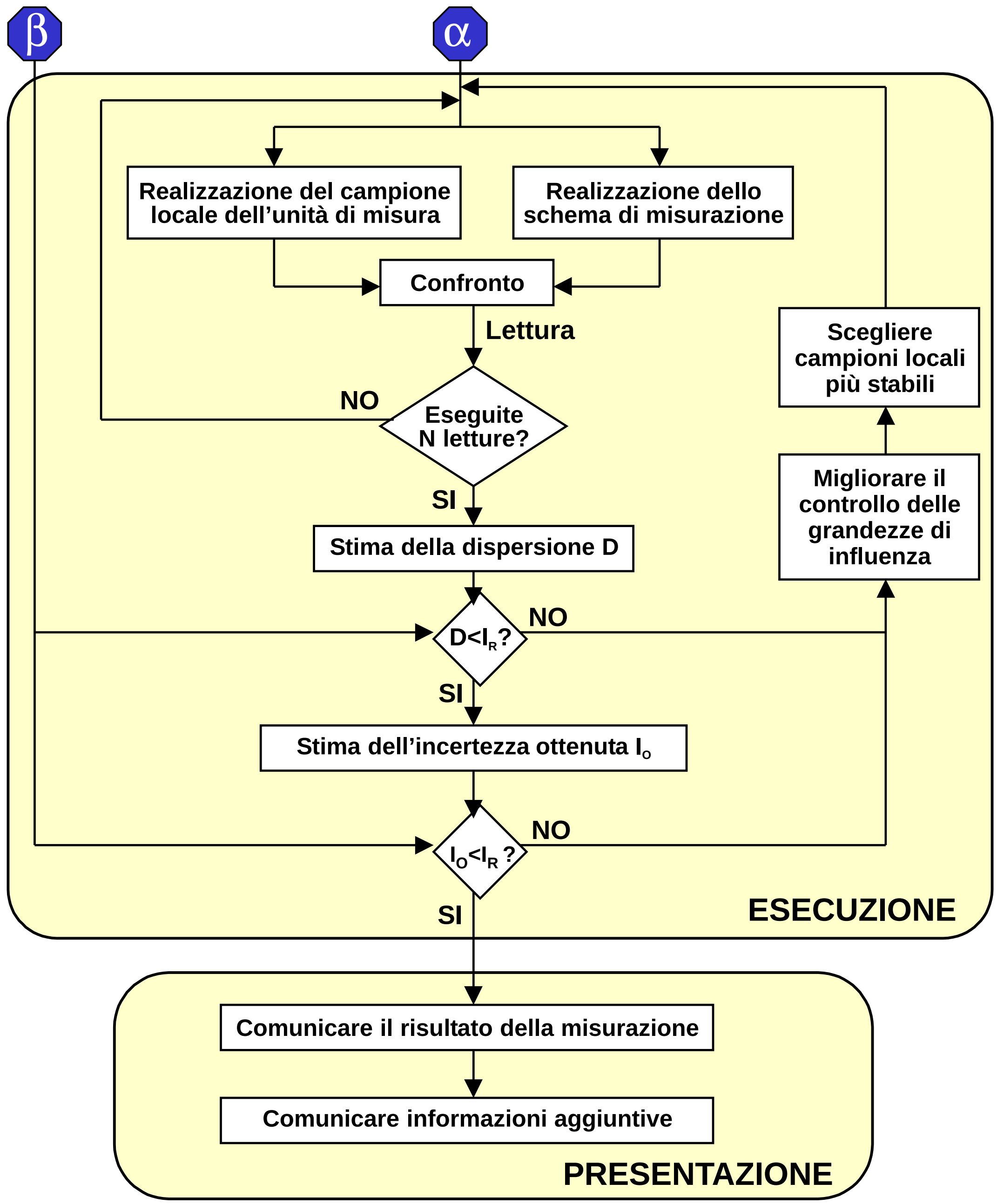

Figura 1.3: *Il diagramma di produzione di una misura - le fasi di esecuzione e presentazione dei risultati.*

2. valore dell'incertezza di misura;
3. unità di misura.

Inoltre, devono essere sempre comunicati:

- la definizione del misurando;
- il valore dei parametri che individuano lo stato del sistema misurato;
- il valore delle grandezze di influenza significative.

Altre informazioni che possono essere comunicate al fruitore della misura sono:

- il metodo di misurazione impiegato;
- l'elenco dei contributi di incertezza;
- la descrizione di eventuali tecniche di elaborazione statistica adottate;
- ...

Definizioni

Le definizioni che seguono, tratte dal documento [1], forniscono la descrizione dei principali termini impiegati nel settore delle misure ed introdotti nel presente capitolo.

Campione materiale Apparecchio che riproduce, durante l'uso, uno o più valori noti di una grandezza con un'incertezza nota.

Compatibilità Condizione che si verifica quando le fasce di valore assegnate in diverse occasioni come misura dello stesso parametro nello stesso stato hanno almeno un elemento in comune.

Grandezza di influenza Grandezza, diversa dal misurando, pertinente al sistema misurato stesso, e/o agli apparecchi usati, e/o all'ambiente, la cui variazione altera, agli effetti della misurazione o della regolazione, le caratteristiche degli apparecchi e/o le modalità dell'interazione di misura.

Incertezza di misura Intorno limitato del valore di un parametro, corrispondente agli elementi della fascia di valore assegnatagli come misura.

Incertezza intrinseca di un parametro Minima incertezza che può essere assegnata nella misura del parametro.

Misura Informazione costituita da un numero, un'incertezza ed un'unità di misura, assegnata a rappresentare un parametro in un determinato stato del sistema.

Misurando Parametro sottoposto a misurazione e/o regolazione, valutato nello stato assunto dal sistema al momento della misurazione stessa.

Misurazione Insieme di operazioni materiali ed elaborative compiute mediante appositi dispositivi posti in interazione con il sistema misurato allo scopo di assegnare la misura di una grandezza assunta come parametro di tale sistema

Metodo di misurazione Specificazione delle procedure di applicazione al sistema misurato di apparecchi per misurazione, delle caratteristiche di questi e delle modalità di elaborazione dei segnali di lettura, da adottarsi per effettuare una misurazione.

Metodo di misurazione a letture ripetute Metodo in cui la misura è assegnata come risultato di un'analisi statistica sulla distribuzione dei dati ottenuti ripetendo le letture diverse volte in condizioni nominalmente uguali.

Modello Insieme organico di relazioni fra i valori di parametri, descrivente le interazioni e l'evoluzione dei sistemi.

Parametro Ogni grandezza pertinente ad un sistema alla quale è necessario assegnare valori per descrivere il sistema stesso, la sua evoluzione e/o le sue interazioni con altri sistemi e con l'ambiente.

Sistema misurato (o in misura) Specifico sistema su cui si effettua la misurazione e/o regolazione.

Stato del sistema Insieme dei valori assunti contemporaneamente dai parametri del sistema.

Trasduttore Mezzo tecnico che compie su un segnale d'ingresso una certa elaborazione, trasformandolo in un segnale d'uscita.

Unità di misura Termine di riferimento adottato, per convenzione, per confrontare una grandezza con altre della stessa specie.

Capitolo 2

Misura e Incertezza

2.1 Introduzione

Il calcolo dell'incertezza di misura è una delle operazioni più importanti nell'esecuzione di una misurazione, in quanto l'incertezza, che deve sempre essere comunicata, esprime l'indeterminazione nella conoscenza del misurando. Una stima per difetto dell'incertezza porta ad assegnare ad una misura una significatività maggiore di quella effettiva, con conseguenti problemi di natura tecnica e/o legale. D'altra parte, una stima per eccesso sminuisce la qualità della misura, ottenuta grazie all'impiego di apparecchiature costose e metodi complessi.

È importante mettere in evidenza il fatto che l'incertezza di una misura NON può essere resa nulla, in quanto:

- le apparecchiature ed i campioni impiegati per eseguire la misurazione non sono ideali;
- l'interazione tra le apparecchiature ed il sistema misurato altera lo stato del sistema stesso, per cui la misura ottenuta sarà comunque diversa da quella a vuoto[1];
- le misure delle grandezze di influenza e delle grandezze che definiscono lo stato del sistema sono caratterizzate da un'incertezza non nulla;

[1]Quando è noto il modello di interazione tra apparecchiature e sistema misurato, la misura a vuoto può essere stimata a partire dalle caratteristiche delle apparecchiature impiegate. Tuttavia, poiché queste caratteristiche sono note solo a meno di un'incertezza, anche la stima della misura a vuoto non sarà perfetta.

- la definizione del misurando, per quanto complessa, non può essere esauriente.

Nei prossimi paragrafi, dopo aver suddiviso i metodi di misurazione in base a considerazioni di tipo operativo, saranno fornite le regole generali per il calcolo dell'incertezza di misura. In particolare saranno definiti i metodi di misurazione diretti ed indiretti, a ciascuno dei quali si applicano regole specifiche per il calcolo dell'incertezza di misura.

2.2 Classificazione dei metodi di misurazione

Una prima classificazione dei metodi di misurazione, che è basata sul numero di letture eseguite per assegnare un valore al parametro in misura, permette di distinguere tra:

metodi di misurazione a lettura singola , nei quali la misura è assegnata in seguito all'esecuzione di una singola lettura su ciascuno degli strumenti coinvolti;

metodi di misurazione a letture ripetute , che prevedono di eseguire più letture di ogni grandezza in condizioni nominalmente uguali, quindi assegnare la misura come risultato di un'analisi statistica dell'insieme dei dati così ottenuti.

Un altro tipo di classificazione dei metodi di misurazione è quella che tiene conto delle modalità operative di assegnazione di una misura ad un parametro, che permette di individuare le seguenti due categorie:

metodi di misurazione diretti sono quelli che permettono di assegnare la misura ad un parametro a partire da una lettura, o da una serie di letture, di uno strumento senza dover conoscere altri parametri del sistema misurato, eccetto il valore di eventuali campioni, le grandezze di influenza e le grandezze espressamente richiamate nella definizione del misurando;

metodi di misurazione indiretti sono quelli in cui la misura di un parametro è assegnata come risultato di un calcolo che coinvolge il valore di altri parametri misurati in modo diretto.

2.2.1 Metodi di misurazione diretti

I metodi di misurazione diretti sono basati sul confronto tra la grandezza in misura ed una grandezza della stessa specie generata da (o memorizzata in) un campione locale.

Le misurazioni dirette più frequenti sono quelle eseguite con il metodo a lettura diretta, ossia assegnando la misura m a partire dall'indicazione l fornita da uno strumento al cui ingresso è applicato il misurando mediante la relazione:

$$m = f_t(l) \tag{2.1}$$

dove f_t è il **diagramma di taratura** memorizzato nello strumento impiegato[2]. Questo metodo di misurazione presuppone quindi che lo strumento sia sottoposto a **taratura**[3] prima dell'uso, allo scopo di determinare la corrispondenza tra le letture fornite dallo strumento e le misure delle grandezze applicate al suo ingresso. I principali contributi di incertezza delle misure ottenute con questa tecnica sono:

- incertezza strumentale, che è dichiarata dal costruttore e che solitamente dipende dal valore assunto dalle grandezze di influenza significative e dal tempo trascorso dall'ultima operazione di taratura o di messa in punto;
- incertezza di lettura (significativa soprattutto nel caso di strumenti a indicazione analogica);
- carico strumentale, ossia alterazione del sistema misurato conseguente all'interazione con lo strumento;
- incertezza intrinseca del misurando, che è legata alla sua definizione;
- imperfetta realizzazione della definizione del misurando, dovuta alla conoscenza non perfetta delle grandezze che definiscono lo stato del sistema misurato;

[2] Se f_t è lineare segue che $m = k \cdot l$ e k è detta costante di taratura.

[3] L'operazione di taratura, che è svolta dal costruttore prima di affidare lo strumento all'utilizzatore, non deve essere confusa con l'operazione di controllo di taratura, eseguita periodicamente per verificare la corrispondenza dello strumento alle proprie specifiche, né con quella di messa in punto, che permette di imporre allo strumento di fornire determinate letture in corrispondenza di particolari valori del misurando agendo sugli organi di regolazione (meccanici o elettronici) eventualmente presenti sullo strumento.

- incertezza con cui sono note le grandezze di influenza.

Un'altra categoria di metodi di misurazione diretti prevede il confronto *per opposizione* tra la grandezza in misura ed un'altra della stessa specie, che è generata da un campione variabile. In questo caso, nel processo di misurazione è coinvolto un dispositivo ausiliario, la cui funzione è quella di rilevare la condizione di equivalenza tra il misurando m e la grandezza c_1 fornita dal campione, per cui la misura è assegnata come:

$$m = c_1 \tag{2.2}$$

L'incertezza delle misure assegnate in seguito all'applicazione di un metodo di confronto per opposizione dipende dai seguenti contributi:

- incertezza e risoluzione del campione;
- incertezza con cui si realizza la condizione di equivalenza tra misurando e grandezza realizzata dal campione;
- carico strumentale;
- incertezza intrinseca del misurando;
- imperfetta realizzazione della definizione del misurando;
- incertezza di misura delle grandezze di influenza.

Una variante del metodo di confronto per opposizione è costituita dal metodo di *sostituzione*, che consta di due fasi distinte. La prima fase richiede di realizzare la condizione che permette di esprimere il misurando mediante la relazione 2.2 impiegando un dispositivo caratterizzato da un'elevata stabilità, in quanto, come si vedrà, la sua incertezza non influenza la stima del misurando. In una seconda fase si *sostituisce* al sistema in misura un campione variabile che realizza una grandezza c_2 omogenea con il misurando, quindi si realizza nuovamente la condizione di equilibrio agendo esclusivamente sul campione c_2 e lasciando inalterato l'altro dispositivo. In questo condizioni vale la relazione:

$$c_2 = c_1 \tag{2.3}$$

per cui la misura m è assegnata semplicemente come:

$$m = c_2 \tag{2.4}$$

Si osservi che, in questo caso, l'incertezza della misura m dipende dall'incertezza del campione c_2 e dalla stabilità a breve termine del dispositivo che realizza il valore c_1, che può essere noto anche solo approssimativamente.

2.2.2 Metodi di misurazione indiretti

Per le finalità di questo corso, un metodo di misurazione è considerato indiretto quando la misura del parametro di un sistema è assegnata mediante un calcolo che coinvolge altri parametri del sistema stesso o di altri sistemi con esso interagenti. La stima di questi parametri è ottenuta mediante metodi di misurazione diretti.

L'applicazione di un metodo di misurazione indiretto presuppone quindi l'esistenza di un modello matematico, che esprima in modo esplicito il legame tra il misurando e le altre grandezze sottoposte a misurazione diretta. Se si indicano con m_I il misurando ottenuto indirettamente e con m_{Di} le grandezze misurate per via diretta, questo legame può essere espresso mediante la relazione:

$$m_I = f(m_{D1}, m_{D2}, ..., m_{DN}) \tag{2.5}$$

dove, per semplicità, è stata omessa la dipendenza dalle grandezze che definiscono lo stato del sistema in misura e dalle grandezze di influenza, che deve sempre essere considerata.

Esempi di misurazione indiretta sono la determinazione del volume di un solido di forma sferica a partire dalla misura del suo diametro, oppure la stima della resistenza elettrica di un dispositivo mediante il metodo voltamperometrico.

Nel caso dei metodi di misurazione indiretti, l'incertezza è stimata a partire dalle incertezze delle grandezze ottenute per via diretta applicando le regole descritte nei paragrafi successivi. In questo caso, un contributo di incertezza aggiuntivo è costituito dalla cosiddetta *incertezza di modello*, che tiene conto del fatto che il modello espresso mediante la relazione 2.5 non descrive in modo adeguato le interazioni tra il misurando e gli altri parametri sottoposti a misurazione diretta.

Se si considera nuovamente il caso della misura del volume di un solido ottenuta a partire dalla misura del suo diametro, l'incertezza di modello potrebbe essere legata, per esempio, al fatto che il solido non ha esattamente forma sferica od alla non perfetta conoscenza della legge di dilatazione termica del solido in esame.

2.3 Il modello deterministico per il calcolo dell'incertezza

Il modello deterministico per il calcolo dell'incertezza, molto diffuso in passato ed ancora oggi impiegato in ambiti in cui è accettata una sovrastima dell'incertezza, prevede di assegnare la misura ad un parametro sotto forma di un intervallo limitato, detto **fascia di valore**, che solitamente è simmetrico rispetto al valore m_0 assegnato al parametro in misura. La fascia di valore è caratterizzata dalle seguenti proprietà:

1. è ragionevolmente garantito che il misurando è compreso nella fascia di valore;

2. tutti gli elementi della fascia di valore sono ugualmente validi a rappresentare il misurando.

Anche nel caso in cui la fascia di valore è assegnata applicando tecniche statistiche ad un insieme di dati ottenuti con un metodo a letture ripetute[4], tutti gli elementi della fascia di valore devono essere considerati ugualmente rappresentativi del misurando, in quanto non si fa alcuna ipotesi riguardo alla distribuzione di probabilità dei valori assegnati.

La misura m di un parametro può essere quindi espressa mediante la seguente relazione:

$$m = (m_0 \pm I)\ \mathrm{U} \tag{2.6}$$

[4]Nel modello deterministico per il calcolo dell'incertezza, l'impiego di un metodo a letture ripetute è finalizzato a valutare l'incidenza del rumore sul valore di lettura: se la dispersione dei valori ottenuti è inferiore all'incertezza strumentale, quest'ultima rappresenta l'incertezza da assegnare alla misura; quando invece la dispersione è paragonabile o maggiore dell'incertezza strumentale, la fascia di valore da assegnare al misurando deve tenere conto di tale dispersione, per cui risulterà più ampia di quella che sarebbe stata assegnata con una misurazione a lettura singola.

dove I è l'*incertezza assoluta* della misura, che è espressa nella stessa unità di misura U di m_0. L'intervallo di ampiezza $2I$ rappresenta la fascia di valore assegnata come misura del parametro.

Quando le fasce di valore assegnate con metodi e apparecchiature diversi o in tempi diversi allo stesso misurando e nello stesso stato del sistema hanno almeno un elemento in comune, allora si dice che le misure sono **compatibili**. Se si vuole valutare la compatibilità tra misure riferite a diversi stati del sistema, è necessario riferire le misure ad un unico **stato di riferimento**: in questo caso la compatibilità comprende anche la validità del modello che descrive il sistema in misura.

In molte occasioni è più significativo comunicare il valore relativo I_r dell'incertezza, oppure il valore relativo percentuale $I_{r\%}$, piuttosto che il valore assoluto, adottando le seguenti definizioni:

$$I_r = \frac{I}{m_0} \quad ; \quad I_{r\%} = \frac{I}{m_0} \cdot 100 \tag{2.7}$$

L'incertezza relativa fornisce infatti un'indicazione immediata della qualità di una misura, che può invece non apparire in modo evidente comunicando l'incertezza assoluta. Si pensi, per esempio, a due misure di lunghezza caratterizzate dalla stessa incertezza assoluta I pari a 1 mm, ma a due diversi valori del misurando pari ad 1 m e ad 100 m. In questo caso, adottando l'incertezza assoluta il risultato delle due misurazioni sarà comunicato come:

$$m_1 = (1 \pm 0.001)\,\mathrm{m} \quad ; \quad m_2 = (100 \pm 0.001)\,\mathrm{m} \tag{2.8}$$

Se invece le misure sono fornite indicandone l'incertezza relativa percentuale si avrà:

$$m_1 = 1\,\mathrm{m} \pm 0.1\% \quad ; \quad m_2 = 100\,\mathrm{m} \pm 0.001\% \tag{2.9}$$

che mette in evidenza la migliore qualità della misura m_2 rispetto ad m_1.

In alcuni casi è comodo esprimere l'incertezza in valore ridotto I_{rid}, ossia rispetto ad un valore convenzionale m_C del misurando mediante la seguente relazione:

$$I_{rid} = \frac{I}{m_C} \tag{2.10}$$

2.3.1 La propagazione dell'incertezza

L'incertezza di misura di un parametro dipende solitamente da più cause, come evidenziato nei paragrafi precedenti, ed è ottenuta combinando opportunamente i vari contributi di incertezza.

Nel caso di misure ottenute con metodi diretti, si esegue semplicemente la somma dei vari contributi di incertezza: nel caso di una misura a lettura diretta si sommeranno, per esempio, l'incertezza strumentale e l'incertezza di lettura, mentre nel caso di una misura assegnata applicando un metodo di confronto per opposizione, si sommeranno l'incertezza con cui è noto il campione impiegato e l'incertezza legata alla non perfetta realizzazione della condizione di equivalenza tra misurando e grandezza generata dal campione.

Se la misura è invece assegnata ricorrendo ad un metodo indiretto, i contributi di incertezza legati alle varie grandezze si combinano secondo le regole indicate di seguito. Si indichi con Y il parametro in misura, che risulta legato ad altri parametri X_i dal seguente modello:

$$Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_N) \tag{2.11}$$

il valore centrale y_0 della fascia di valore assegnata come misura di Y è ottenuto a partire dai valori centrali x_{i0} degli altri parametri come:

$$y_0 = f(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{N0}) \tag{2.12}$$

Il valore assoluto I_y dell'incertezza di misura, ossia la semiampiezza della fascia di valore di y, è invece ottenuta a partire dalle incertezze assolute I_{xi} delle grandezze x_i mediante la relazione:

$$I_y = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right|_{(x_{10},\ldots,x_{N0})} \cdot I_{x1} + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_N}\right|_{(x_{10},\ldots,x_{N0})} \cdot I_{xN} \tag{2.13}$$

Il modello espresso dalla relazione 2.13 rappresenta lo sviluppo in serie (di Taylor) approssimato ai termini del primo ordine (sviluppo lineare) della funzione f intorno al punto $(x_{10}, \ldots, x_{N0})$. Se la funzione f è lineare, la relazione 2.13 è esatta, in quanto i termini di ordine superiore al primo sono tutti nulli. Se invece f è non lineare, la relazione 2.13 fornisce un valore approssimato di I_y; questa approssimazione è solitamente accettabile, in quanto gli incrementi $I_{x1}, \ldots, I_{xN}$ (le incertezze delle grandezze x_i) sono tali da rendere trascurabili i contributi legati ai termini di ordine superiore al primo.

Si osservi che il modello di propagazione dell'incertezza espresso dalla relazione 2.13 porta inevitabilmente ad una stima per eccesso dell'incertezza della grandezza y, in quanto si considera il valore massimo delle incertezze I_{xi} ed i vari contributi sono sommati in valore assoluto, quindi si esclude a priori la possibilità di una compensazione, anche parziale, tra i contributi di incertezza.

2.3.2 Esempi

Si forniscono di seguito alcuni esempi di calcolo dell'incertezza secondo il modello deterministico per casi particolari della funzione f.

Somma e differenza

$$Y = X_1 + X_2 - X_3 \tag{2.14}$$

Applicando la relazione 2.13 si ottiene:

$$I_y = I_{x1} + I_{x2} + I_{x3} \tag{2.15}$$

da cui si può enunciare la regola seguente: **l'incertezza assoluta di una grandezza ottenuta come somma e/o differenza di altre grandezze x_i è pari alla somma delle incertezze assolute delle grandezze x_i.**

In questo caso è chiaramente messa in evidenza la natura pessimistica del modello deterministico, secondo il quale i singoli contributi di incertezza sono tali da fornire un'incertezza complessiva corrispondente alla peggiore combinazione dei loro segni. Nella realtà è infatti probabile che i valori nominali x_{10}, x_{20} ed x_{30} assegnati alle grandezze presenti nella relazione 2.14 presentino scostamenti rispetto ai valori effettivi tali da ottenere una parziale compensazione dell'incertezza. Questo può avvenire, per esempio, nel caso in cui gli scostamenti di x_2 ed x_3 hanno lo stesso segno, oppure se lo scostamento di x_1 ha segno opposto a quello di x_2.

Nel caso delle misure ottenute per differenza, è opportuno un approfondimento per mettere in guardia da 'cattive sorprese'. Si consideri la grandezza Y ottenuta come:

$$Y = X_1 - X_2 \tag{2.16}$$

L'incertezza relativa I_{ry} si calcola come:

$$I_{ry} = \frac{I_y}{y_0} = \frac{I_{x1} + I_{x2}}{x_{10} - x_{20}} \tag{2.17}$$

Nel caso in cui i valori x_{10} e x_{20} sono simili, il denominatore dell'espressione 2.17 può diventare dello stesso ordine di grandezza o, addirittura, più piccolo del numeratore, per cui l'incertezza relativa della grandezza ottenuta per differenza può assumere valori molto elevati. Si consideri, ad esempio, la misurazione delle perdite di potenza P_p di un trasformatore di tensione da 10 kW e rendimento η del 98 % ottenute come:

$$P_p = P_i - P_u \tag{2.18}$$

dove P_i è la potenza assorbita dal primario del trasformatore e P_u la potenza resa al secondario, che sono misurate entrambe con un'incertezza relativa pari all'1 %. Applicando la relazione 2.17 è facile verificare che l'incertezza relativa della misura di P_p è pari al 99 %.[5]

Prodotto e quoziente

$$Y = \frac{X_1 \cdot X_2}{X_3} \tag{2.19}$$

L'incertezza assoluta della grandezza Y vale:

$$I_y = \frac{x_{20}}{x_{30}} \cdot I_{x1} + \frac{x_{10}}{x_{30}} \cdot I_{x2} + \frac{x_{10} \cdot x_{20}}{{x_{30}}^2} \cdot I_{x3} \tag{2.20}$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$I_y = \frac{x_{10} \cdot x_{20}}{x_{30}} \cdot \frac{I_{x1}}{x_{10}} + \frac{x_{10} \cdot x_{20}}{x_{30}} \cdot \frac{I_{x2}}{x_{20}} + \frac{x_{10} \cdot x_{20}}{x_{30}} \cdot \frac{I_{x3}}{x_{30}} = y_0 \cdot (I_{rx1} + I_{rx2} + I_{rx3}) \tag{2.21}$$

da cui si ricava l'incertezza relativa di y come:

$$I_{ry} = \frac{I_y}{y_0} = I_{rx1} + I_{rx2} + I_{rx3} \tag{2.22}$$

[5] Le perdite di un trasformatore non sono mai misurate per differenza, ma a partire dai risultati della prova a vuoto e della prova di corto circuito.

Vale quindi la seguente regola: **l'incertezza relativa di una grandezza ottenuta come prodotto e/o quoziente di altre grandezze x_i è pari alla somma delle incertezze relative delle grandezze x_i.**

Potenza e radice

$$Y_1 = {X_1}^N = \prod_N X_1 \tag{2.23}$$

Applicando la regola del prodotto si ottiene semplicemente:

$$I_{ry1} = N \cdot I_{rx1} \tag{2.24}$$

Inoltre, visto che la radice può essere scritta sotto forma di potenza come:

$$Y_2 = \sqrt[M]{X_2} = {X_2}^{\frac{1}{M}} \tag{2.25}$$

segue che:

$$I_{ry2} = \frac{1}{M} \cdot I_{rx2} \tag{2.26}$$

Piccolo incremento

Si consideri la grandezza Y ottenuta come:

$$Y = X + \Delta_X \quad ; \Delta_X \ll X \tag{2.27}$$

e si supponga che il misurando sia la grandezza Z così definita:

$$Z = \frac{Y}{X} = 1 + \frac{\Delta_X}{X} \tag{2.28}$$

Dall'ultima relazione e per la definizione di incertezza relativa, si ha che:

$$I_{rz} = I_{r(1+\Delta_x/x)} = \frac{I_{(1+\Delta_x/x)}}{1+\Delta_x/x} \approx I_{(1+\Delta_x/x)} \tag{2.29}$$

dove l'approssimazione impiegata deriva dal fatto che, per ipotesi, $\frac{\Delta_x}{x} \ll 1$.

Applicando le regole descritte in questo paragrafo si ottiene la seguente relazione:

$$I_{(1+\Delta_x/x)} = I_1 + I_{\frac{\Delta_x}{x}} = I_{\frac{\Delta_x}{x}} = \frac{\Delta_x}{x} \cdot I_{r\frac{\Delta_x}{x}} = \frac{\Delta_x}{x} \cdot (I_{r\Delta_x} + I_{rx}) \qquad (2.30)$$

che permette infine di esprimere l'incertezza relativa del misurando z come:

$$I_{rz} = \frac{\Delta_x}{x} \cdot (I_{r\Delta_x} + I_{rx}) \qquad (2.31)$$

Si osservi quindi che, essendo il termine $\frac{\Delta_x}{x}$ molto più piccolo dell'unità, la grandezza in misura z è ottenuta con un'incertezza relativa che risulta molto più piccola della somma delle incertezze relative delle grandezze di ingresso.

2.3.3 Modalità di dichiarazione di una misura

Nel caso di una misura ottenuta applicando il modello deterministico per il calcolo dell'incertezza, le informazioni **essenziali** da fornire sono:

- il valore stimato del misurando e la corrispondente unità di misura;
- la fascia di valore assegnata al misurando, che può essere espressa mediante l'incertezza assoluta, relativa o ridotta;
- il valore e l'incertezza delle grandezze che individuano lo stato del sistema in misura e delle grandezze di influenza.

In alcuni casi possono essere fornite informazioni aggiuntive, quali:

- le eventuali correzioni eseguite per tener conto del carico strumentale ed i corrispondenti effetti residui sull'incertezza di misura;
- un elenco dei contributi di incertezza considerati;
- il numero di letture realizzate per l'applicazione di un metodo a letture ripetute.

Un altro elemento importante da tenere in considerazione per comunicare correttamente il risultato di una misurazione, riguarda il numero di cifre utilizzato per dichiarare l'incertezza ed il valore stimato del misurando.

L'incertezza è generalmente una quantità molto più piccola (almeno un'ordine di grandezza) del valore assegnato al misurando, per cui la stima dell'incertezza è sufficiente che sia nota con un'incertezza di circa il 10%. Per questo motivo, le specifiche di incertezza di strumenti e campioni sono dichiarate con un livello di incertezza non inferiore al 10%, in quanto una migliore caratterizzazione metrologica di un dispositivo non porterebbe alcun beneficio, mentre comporterebbe un maggior costo per il costruttore. Per questo motivo, l'incertezza è di norma espressa utilizzando una o, al più, due cifre significative. Non ha infatti senso dichiarare, per esempio, un'incertezza di 9.75 g o del 5.2%, mentre si dovrebbe dichiarare un'incertezza di 10 g o del 5%, utilizzando quindi una sola cifra significativa. Due cifre significative possono essere usate quando il numero che esprime l'incertezza è inferiore a 5: se il valore ottenuto da una stima di incertezza relativa è pari a 1.39%, arrotondare al valore 1% provoca un errore di circa il 40%; in casi come questo è consigliato utilizzare due cifre significative, dichiarando quindi un'incertezza pari a 1.4%.

Il numero di cifre con cui si comunica il valore stimato del misurando è strettamente correlato alla sua incertezza. Di regola, nei calcoli intermedi si conservano tutte le cifre significative, per evitare di introdurre inutili errori dovuti a troncamenti o arrotondamenti. Nella dichiarazione del risultato della misurazione, il valore del misurando **deve** essere fornito arrotondando la cifra successiva a quella su cui grava l'incertezza. Se, per esempio, il risultato della stima di una lunghezza è pari a 7.837 m e la stima della sua incertezza è pari a 0.1 m, il risultato finale sarà comunicato come $l_0 = (7.84 \pm 0.1)$ m.

2.4 Il modello probabilistico per il calcolo dell'incertezza

Il modello che dovrebbe essere oggigiorno impiegato per il calcolo dell'incertezza è quello descritto nella norma UNI CEI ENV 13005 '*Guida all'espressione dell'incertezza di misura*' del 31/7/2000 [2], che è la versione ufficiale in lingua italiana della norma europea sperimentale ENV 13005 '*Guide to the expression of uncertainty in measurement*' emanata nel 1999 ed approvata e riconosciuta dal CPIM (*Comité International des Poides and Mesures*).

Il principale obiettivo di questa norma è la definizione di un nuovo modello, accettato a livello internazionale, in grado di fornire una stima dell'incertezza più realistica di quella ottenuta con il modello deterministico. Quest'ultimo, infatti, porta inevitabilmente a sovrastimare l'incertezza, visto che è basato su ipotesi eccessivamente pessimistiche, come descritto nel precedente paragrafo.

Il modello descritto nella norma UNI CEI ENV 13005 è basato su un approccio di tipo probabilistico, in quanto la grandezza in misura è trattata come una variabile aleatoria (v.a.) a cui è associata un'opportuna funzione densità di probabilità (d.d.p.). Come si vedrà in seguito, il valore assegnato al misurando è una stima del valor medio della sua funzione d.d.p. Nell'ipotesi che questa stima non risulti polarizzata, la grandezza che esprime gli scostamenti delle singole osservazioni del misurando dal suo valor medio è una v.a. a valor medio nullo: la deviazione tipo della funzione d.d.p. associata a questa nuova v.a. è assunta come informazione 'quantitativa' dell'incertezza di misura ed è detta **incertezza tipo**.

L'ipotesi di assenza di polarizzazione dalla stima del misurando presuppone che nessuna grandezza introduca sul risultato della misurazione un errore sistematico, di seguito denominato **effetto sistematico**. Esempi di effetti sistematici sono il mancato azzeramento di uno strumento di misura oppure l'alterazione del sistema in misura provocata dall'interazione con uno strumento (carico strumentale).

Per l'applicazione del modello probabilistico per il calcolo dell'incertezza risulta quindi fondamentale che:

1. l'operatore sia in grado di individuare tutti gli effetti sistematici significativi;

2. gli effetti sistematici individuati siano corretti mediante un opportuno modello.

Mentre nel modello deterministico la fascia di valore assegnata al misurando individua un intervallo all'interno del quale è ragionevolmente compreso il misurando, nel modello probabilistico la fascia di valore assume il significato di intervallo che comprende il misurando con una probabilità assegnata. La fascia di valore così definita prende il nome di **intervallo di fiducia** e la probabilità che il misurando appartenga a tale intervallo è detto **livello di fiducia**. Se si indica con x la generica grandezza in misura e con $u(x)$ la corrispondente incertezza tipo, l'intervallo di fiducia è individuato dall'**incertezza estesa** $U(x)$, ottenuta moltiplicando per un opportuno coefficiente k, detto **fattore di copertura**, l'incertezza tipo. Indicando con x_0 la stima del misurando, l'intervallo di fiducia risulta compreso tra gli estremi

$x_0 - k \cdot u(x)$ e $x_0 + k \cdot u(x)$. **Il livello di fiducia può essere ricavato solo nel caso in cui sia nota la funzione d.d.p. della variabile aleatoria in misura**.

Nella norma UNI CEI ENV 13005, i metodi impiegati per valutare i vari contributi di incertezza sono classificati in due categorie:

valutazione di categoria A dell'incertezza basata su un approccio statistico di tipo frequentistico;

valutazione di categoria B dell'incertezza eseguita mediante metodi diversi da quello frequentistico, per esempio a partire da informazioni note a priori.

Una valutazione di categoria A dell'incertezza può essere quindi eseguita solo quando si ha a disposizione un insieme di osservazioni della grandezza in misura, ottenute, per esempio, mediante l'applicazione di un metodo di misurazione a letture ripetute.

La valutazione di categoria B dell'incertezza è invece eseguita sulla base di informazioni fornite da terze parti, come nel caso della misura di un campione materiale dichiarata in un certificato di taratura oppure nel caso delle specifiche di incertezza di uno strumento di misura dichiarate dal costruttore. Come si vedrà in seguito, la valutazione di categoria B dell'incertezza richiede spesso di ipotizzare una distribuzione 'iniziale' dei contributi di incertezza considerati.

Nei successivi paragrafi si forniranno le regole generali di valutazione dell'incertezza secondo le due categorie definite, quindi si descriverà il **modello di propagazione delle incertezze**. Infine si presenteranno alcune tecniche per la stima dell'intervallo di fiducia (o del fattore di copertura) corrispondente ad un livello di fiducia assegnato.

2.4.1 Valutazione di categoria A dell'incertezza

Si supponga di misurare la generica grandezza X mediante un metodo di misurazione a letture ripetute e si indichino con $x_1, x_2, \ldots, x_N$ le N osservazioni (il cosiddetto *campione*[6]) ottenute in condizioni nominalmente uguali.

[6] In ambito probabilistico, il campione rappresenta un sottoinsieme della popolazione. Non confondere con il termine campione utilizzato nei precedenti capitoli, che indicava un dispositivo in grado di realizzare uno o più valori di una unità di misura.

Si supponga inoltre che le osservazioni della grandezza X siano tra di loro scorrelate[7].

Il valor medio (o valore sperato) μ della popolazione è stimato mediante la media empirica $\overline{x}$ del campione disponibile come:

$$\overline{x} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} x_k \tag{2.32}$$

Si osservi che la media empirica $\overline{x}$ è una variabile aleatoria con d.d.p. asintoticamente gaussiana (si veda il teorema del limite centrale in [3]); inoltre, se le osservazioni x_k hanno d.d.p. gaussiana, la media empirica avrà d.d.p. gaussiana anche nel caso in cui il campione ha dimensione finita.

La varianza σ^2 della popolazione è stimata mediante la varianza empirica corretta $s^2(x)$ del campione:

$$s^2(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N} (x_k - \overline{x})^2 \tag{2.33}$$

La radice quadrata positiva $s(x)$ della varianza empirica è detta scarto tipo sperimentale ed indica il grado di dispersione delle singole osservazioni intorno alla media empirica $\overline{x}$.

La varianza della media è stimata a partire dalla varianza empirica come:

$$s^2(\overline{x}) = \frac{s^2(x)}{N} \tag{2.34}$$

Lo scarto tipo sperimentale della media, ossia il grado di dispersione di diverse stime della media empirica $\overline{x}$ rispetto al valore sperato, è stimato come:

$$s(\overline{x}) = \frac{s(x)}{\sqrt{N}} \tag{2.35}$$

La misura della grandezza X è infine assegnata fornendo le seguenti informazioni:

- il valore sperato di X, la cui stima è pari a $\overline{x}$;
- l'**incertezza tipo** (assoluta) $u(x)$, pari allo scarto tipo sperimentale della media $s(\overline{x})$.

[7] Se due v.a. sono statisticamente indipendenti, ossia se il valore assunto da una non influenza il valore assunto dall'altra, le due v.a. sono anche scorrelate.

A questo punto è opportuno un commento critico della relazione 2.35, in quanto questa sembra indicare la possibilità di ridurre 'a piacere' l'incertezza tipo semplicemente aumentando il numero N di osservazioni della variabile aleatoria in misura. Tuttavia, all'aumentare di N aumenta in modo proporzionale il tempo di osservazione e, di conseguenza, aumenta il rischio di correlazione tra le osservazioni, per esempio a causa di fluttuazioni periodiche di una o più grandezze di influenza. In questo caso non può essere applicata la relazione 2.35, che vale solo se le osservazioni $x_1, x_2, \ldots, x_N$ sono scorrelate. Un altro problema deriva dal fatto che risulta difficoltoso garantire la stabilità del sistema in misura nel caso di tempo di osservazione elevato: il rischio è quindi quello di 'seguire' le variazioni del misurando piuttosto che eseguire una serie di osservazioni in condizioni nominalmente uguali.

Un criterio che può essere applicato in pratica consiste nel fissare a dieci il minimo valore di N: in queste condizioni, la variabile aleatoria media empirica $\overline{x}$ può essere considerata, con buona approssimazione, distribuita secondo una d.d.p. gaussiana indipendentemente dalla d.d.p. della popolazione delle singole osservazioni x_i. Questo valore minimo può essere eventualmente aumentato fino a ridurre lo scarto tipo sperimentale della media (relazione 2.35) ad un valore trascurabile rispetto all'incertezza strumentale del dispositivo impiegato per ottenere le osservazioni della grandezza in misura oppure ad un valore simile all'incertezza intrinseca del misurando.

Nel caso in cui il numero di osservazioni N sia dell'ordine di una decina, una valutazione esatta della d.d.p. della v.a. $\overline{x}$ richiede l'applicazione di complicati metodi analitici basati sulla convoluzione della d.d.p. della popolazione delle singole osservazioni. Questo 'sforzo' analitico avrebbe senso se portasse ad una valutazione più accurata dell'intervallo di fiducia corrispondente ad un livello di fiducia assegnato (si veda il paragrafo 2.4.4). Tuttavia, lo stimatore dello scarto tipo sperimentale della media, espresso dalla relazione 2.35, non è esatto, ma risulta affetto da un'incertezza che può assumere valori elevati. Se si considera, per esempio, il caso di una v.a. X distribuita normalmente, l'incertezza relativa della stima dello scarto tipo sperimentale della media può essere ottenuta come:

$$\frac{\sigma[s(\overline{x})]}{s(\overline{x})} \approx \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (N-1)}} \tag{2.36}$$

Applicando questa relazione si ottiene un'incertezza relativa di $s(\overline{x})$ del 24% nel caso $N = 10$ e del 16% nel caso $N = 20$: risulta quindi ingiustificata una stima più accurata della d.d.p. della v.a. $\overline{x}$, poiché l'intervallo di fiducia si ottiene a partire da un parametro che solitamente è stimato con un'incertezza dell'ordine del dieci-venti per cento.

Un ultimo commento riguarda l'ipotesi di assenza di correlazione tra le osservazioni della grandezza in misura, che può essere considerata soddisfatta nella maggior parte delle applicazioni di misura. Tuttavia, in casi particolari quali lo studio dei campioni di frequenza e di altre grandezze misurate a lungo termine, le osservazioni risultano correlate, per cui la media e lo scarto tipo sperimentale della media non sono stimatori empirici corretti. In questo caso è necessario ricorrere a metodi statistici adatti a descrivere serie di misurazioni correlate, un esempio dei quali può essere trovato in [4].

2.4.2 Valutazione di categoria B dell'incertezza

La valutazione di categoria B dell'incertezza NON è eseguita mediante l'analisi statistica di un insieme di osservazioni della grandezza in misura, ma sulla base di informazioni fornite da terze parti. Una situazione di questo tipo si verifica, per esempio, in un metodo di confronto per opposizione (si veda 2.2.1), dove nella relazione di misura compare il valore di un campione materiale che solitamente è dichiarato in un certificato di taratura. Un altro esempio è quello delle misure ottenute con il metodo a letture dirette, dove uno dei principali contributi di incertezza è legato alle specifiche dello strumento di misura, dichiarate dal costruttore sotto forma di diagramma di taratura.

Come si vedrà nel paragrafo successivo, l'incertezza di una grandezza ottenuta in modo indiretto è stimata combinando le incertezze ottenute con metodi di categoria A e B, per cui è necessario esprimere le ultime sotto forma di incertezza tipo, evidentemente con regole diverse da quelle esposte nel precedente paragrafo. Una regola di validità generale per la trattazione delle incertezze di categoria B non può essere enunciata, soprattutto perchè in molti casi è necessario ricorrere ad informazioni pregresse che riguardano le caratteristiche di strumenti e campioni, la loro storia od il loro comportamento nei riguardi delle grandezze di influenza. Ciò evidenzia il fatto che la valutazione di categoria B dell'incertezza non è esente da giudizi soggettivi dell'operatore, che derivano dalla sua esperienza e dalla sua sensibilità.

Di seguito si fornirà un elenco dei casi che si possono incontrare nella maggior parte delle applicazioni di misura, partendo da quelli meglio definiti e concludendo con quelli in cui il giudizio dell'operatore può influenzare in modo significativo la stima dell'incertezza della grandezza in misura.

Incertezza estesa e fattore di copertura noti

È dichiarata l'incertezza estesa di misura $U(x)$, accompagnata dalla frase *l'incertezza di misura dichiarata è stata ottenuta moltiplicando l'incertezza tipo $u(x)$ per il fattore di copertura k*. In questo caso, l'incertezza tipo si ottiene semplicemente dividendo l'incertezza estesa $U(x)$ per il fattore di copertura k. Questa è ovviamente la situazione ottimale, che in futuro dovrebbe diventare quella più comune; attualmente, l'incertezza è dichiarata con questa modalità nei certificati di taratura rilasciati dagli istituti metrologici primari e dai centri di taratura SIT (Sistema di Taratura in Italia).

Incertezza estesa e livello di fiducia noti

È dichiarata l'incertezza estesa di misura $U(x)$ ed il livello di fiducia, che solitamente è pari al 90%, 95% o 99%. In queste condizioni, l'incertezza tipo $u(x)$ può essere ottenuta solo se si ipotizza che la variabile aleatoria 'incertezza' sia caratterizzata da una particolare d.d.p. Per esempio, se il livello di fiducia dichiarato è del 95% e se si ipotizza una d.d.p. gaussiana, l'incertezza tipo si ottiene dividendo l'incertezza estesa per il fattore di copertura 1.96.

Questo modo di dichiarare l'incertezza è in uso, oramai da una decina di anni, da parte di quasi tutti i costruttori di strumenti e campioni dedicati al settore della metrologia.

Fascia di valore nota

La fascia di valore, espressa mediante l'indice di classe di uno strumento o mediante opportune formule, è dichiarata facendo riferimento al modello deterministico: l'informazione disponibile è quindi un intervallo di ampiezza $2 \cdot I$ (I è l'incertezza assoluta) all'interno del quale è ragionevolmente compreso il misurando. L'incertezza è fornita in questi termini per strumentazione di misura di vecchia concezione, come nel caso degli strumenti elettromeccanici, e spesso anche per strumentazione elettronica, sia analogica che numerica, di tipo *general purpose*.

Allo scopo di ottenere un'informazione in termini di incertezza tipo, è necessario ipotizzare una d.d.p. ragionevole per la grandezza considerata.

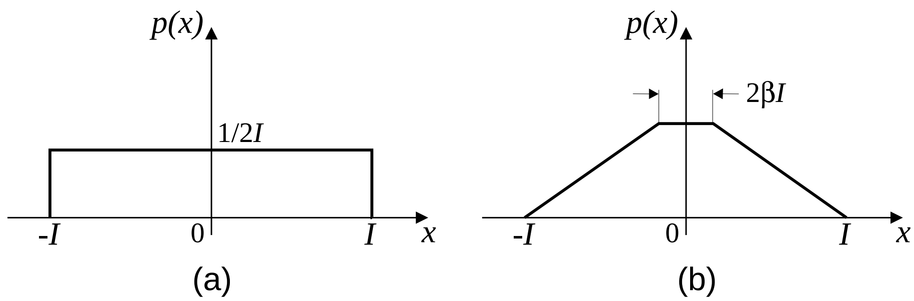

Figura 2.1: *Variabile aleatoria caratterizzata da distribuzione di probabilità uniforme (a) e trapezoidale (b).*

Se tutti gli elementi della fascia di valore possono essere considerati ugualmente validi a rappresentare il misurando, è naturale assumere una d.d.p. uniforme per la variabile aleatoria in misura (si veda la figura 2.1(a)): in questo caso l'incertezza tipo corrispondente è ottenuta come:

$$u(x) = \frac{I}{\sqrt{3}} \tag{2.37}$$

Se invece di dispone di informazioni che attribuiscono al valore centrale della fascia di valore una probabilità più alta rispetto agli altri elementi della fascia stessa, per la variabile aleatoria in misura si può assumere una d.d.p. diversa da quella uniforme. Un esempio è costituito dalla funzione d.d.p. trapezoidale (si veda la figura 2.1(b)), caratterizzata da una base minore pari a $2 \cdot \beta \cdot I$, con il parametro β che può assumere un valore compreso tra 0 ed 1 (si noti che per $\beta = 1$ si ha la d.d.p. uniforme, mentre con $\beta = 0$ si ha una funzione d.d.p. triangolare). In questo caso, l'incertezza tipo è ottenuta a partire dalla semiampiezza I della fascia di valore come:

$$u(x) = I \cdot \sqrt{\frac{(1 + \beta^2)}{6}} \tag{2.38}$$

2.4.3 La propagazione delle incertezze

Nel caso semplice di una misura ottenuta con un metodo a singola lettura diretta, l'incertezza tipo si ottiene sommando quadraticamente i vari contributi di incertezza, quali incertezza strumentale ed incertezza di lettura, che sono tutti valutati con metodi di categoria B:

$$u(x) = \sqrt{u_{1B}^2(x) + u_{2B}^2(x) + \dots} \tag{2.39}$$

Se la misura è invece ottenuta applicando un metodo di misurazione a letture ripetute oppure impiegando una relazione matematica che lega il misurando ad altre grandezze, si applicano le regole di seguito descritte, che rappresentano il modello probabilistico per la propagazione dell'incertezza.

Si indichi con Y la generica grandezza in misura, che è legata ad M grandezze X_i dalla relazione:

$$Y = f(X_1, \dots, X_H, X_{H+1} \dots, X_M) \tag{2.40}$$

dove le prime H grandezze sono ottenute con metodi diretti a letture ripetute, mentre le altre $M - H$ grandezze sono ottenute con metodi diretti a lettura singola oppure sono fornite da terze parti. Si ricorda che per una corretta applicazione del modello probabilistico del calcolo dell'incertezza, è necessario che il modello di misura tenga conto di tutti gli effetti sistematici significativi, quindi la relazione 2.40 deve comprendere eventuali termini correttivi legati, per esempio, al carico strumentale o all'effetto di grandezze di influenza.

Per ciascuna grandezza $X_1, \dots, X_H$ si dispone di una serie di osservazioni, per cui si può ricorrere alla relazione 2.32 per stimare le medie empiriche $\overline{x_1}, \dots, \overline{x_H}$ dei campioni disponibili. Per le grandezze $X_{H+1}, \dots, X_M$ si dispone invece di un solo valore $x_{(H+1)0}, \dots, x_{M0}$ ottenuto, per esempio, dalla singola lettura di uno strumento oppure dai dati riportati in un certificato di taratura o nel manuale di uno strumento.

La stima y_0 della grandezza in misura è ottenuta come:

$$y_0 = f(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_H}, x_{(H+1)0}, \dots, x_{M0}) \tag{2.41}$$

Per quanto riguarda la stima dell'incertezza di misura, detta **incertezza tipo combinata** ed indicata con il simbolo $u_c(y)$, si considera inizialmente il caso in cui le stime delle grandezze X_i sono scorrelate. In questo caso, $u_c(y)$ è ottenuta mediante la seguente relazione:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i)} \tag{2.42}$$

dove $u(x_i)$ è l'incertezza tipo della generica grandezza x_i presente nella relazione 2.41, che è stimata applicando l'opportuna tecnica di trattamento dell'incertezza (categoria A e/o categoria B).

Se si rimuove l'ipotesi di assenza di correlazione tra le stime delle grandezze X_i, l'incertezza tipo combinata di y è stimata mediante la seguente relazione:

$$u_c(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{M} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{l=j+1}^{M} \frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_l} \cdot u(x_j, x_l)} \qquad (2.43)$$

dove $u(x_j, x_l)$, detta covarianza della coppia di grandezze x_j ed x_l, è una grandezza che esprime il grado di dipendenza statistica tra le stime delle due grandezze.

La dipendenza statistica tra due variabili aleatorie è solitamente espressa mediante un parametro adimensionale detto coefficiente di correlazione, che è ottenuto normalizzando la covarianza rispetto al prodotto delle deviazioni tipo delle due variabili:

$$\rho(x_j, x_l) = \frac{u(x_j, x_l)}{u(x_j) \cdot u(x_l)} \qquad (2.44)$$

Il coefficiente di correlazione assume valori compresi tra -1 e $+1$ e vale zero se le stime delle due grandezze sono statisticamente indipendenti[8].

Nel caso particolare in cui $\rho(x_j, x_l) = +1$, si parla di correlazione lineare positiva tra le stime delle due grandezze x_j ed x_l e la relazione 2.43 diventa:

$$u_c(y) = \sqrt{\left[\sum_{i=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i)\right]^2} = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i) \qquad (2.45)$$

che ha un aspetto simile alla relazione impiegata per la stima dell'incertezza secondo il modello deterministico, ma rispetto a quella presenta due importanti differenze: non compaiono i valori assoluti delle derivate parziali e la semiampiezza I delle fasce di valore è sostituita dall'incertezza tipo delle varie grandezze x_i.

La relazione 2.43 mette in evidenza il fatto che la stima dell'incertezza secondo il modello probabilistico non può prescindere dalla valutazione della correlazione tra le stime delle grandezze misurate. Tuttavia, non esistono

[8]Si osservi che le stime di due grandezze che sono indipendenti nel senso dell'analisi matematica, possono essere dipendenti in senso statistico, per esempio perchè ottenute da un confronto rispetto allo stesso campione.

regole di validità generale che permettano di calcolare la covarianza, o equivalentemente il coefficiente di correlazione, tra le misure di due grandezze, in quanto in questa valutazione entrano in gioco conoscenze sui fenomeni fisici coinvolti e sulle modalità di misurazione delle grandezze in gioco che dipendono dall'esperienza e dalla sensibilità dell'operatore. In generale si può solo affermare che le misure di due grandezze sono scorrelate quando sono ottenute non simultaneamente e/o con esperimenti indipendenti.

Nel caso di due generiche grandezze X_j ed X_l ottenute con metodi di misurazione a letture ripetute, ossia quando si dispone di N osservazioni delle grandezze misurate, è possibile calcolare una stima della covarianza delle medie empiriche $\overline{x_j}$ ed $\overline{x_l}$ mediante la seguente relazione:

$$s(\overline{x_j}, \overline{x_l}) = \frac{1}{N \cdot (N-1)} \sum_{i=1}^{N} (x_{ji} - \overline{x_j}) \cdot (x_{li} - \overline{x_l}) \tag{2.46}$$

A conclusione di questo paragrafo, come esempio applicativo delle regole fin qui fornite, si riporta la stima dell'incertezza tipo di una grandezza ottenuta con un metodo di misurazione a letture ripetute. Si consideri perciò la grandezza X_1 e si indichino con $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1N}$ le N osservazioni disponibili, fornite da uno strumento le cui specifiche di incertezza sono espresse in termini di fascia di valore $2 \cdot I_x$. Nell'ipotesi che tutti gli elementi della fascia di valore sono ugualmente validi a rappresentare il misurando, ossia assumendo una d.d.p. uniforme per la variabile aleatoria in misura, l'incertezza tipo delle singole osservazioni vale (si veda 2.4.2):

$$u(x_{1k}) = \frac{I_x}{\sqrt{3}}\ ;\ k = 1, \ldots, N \tag{2.47}$$

Come stima della grandezza X_1 si fornisce la media empirica $\overline{x_1}$, che è ottenuta per via indiretta a partire dal modello 2.32. Questa stima è affetta da due contributi di incertezza: il primo legato alle specifiche di incertezza dello strumento impiegato, che è valutabile con un metodo di categoria B, ed il secondo legato alla dispersione della v.a. $\overline{x_1}$, stimato mediante un metodo di categoria A.

Per il contributo valutato con il metodo di categoria B, è ragionevole assumere che le N osservazioni della grandezza X_1 sono correlate linearmente, in quanto sono ottenute con lo stesso strumento e nelle medesime condizioni. Si applica quindi la relazione 2.45, ottenendo:

$$u_B(\overline{x_1}) = u(x_{1k}) = \frac{I_x}{\sqrt{3}} \tag{2.48}$$

Il secondo contributo di incertezza è ottenuto mediante lo stimatore 'scarto tipo sperimentale della media' (si veda la relazione 2.35):

$$u_A(\overline{x_1}) = \sqrt{\frac{1}{N \cdot (N-1)} \sum_{k=1}^{N} (x_{1k} - \overline{x_1})^2} \tag{2.49}$$

Si ricorda che lo stimatore 2.35 può essere applicato nel caso di osservazioni scorrelate, quindi si è implicitamente supposta l'indipendenza statistica tra le N osservazioni della grandezza X_1. Questa ipotesi è giustificata dal fatto che le cause di dispersione della v.a. $\overline{x_1}$ (instabilità del misurando, rumore, ...) sono statisticamente indipendenti.

Combinando infine i contributi ottenuti con i metodi di categoria A e B, si ottiene l'incertezza tipo della stima della grandezza X_1:

$$u(\overline{x_1}) = \sqrt{u_A^2(\overline{x_1}) + u_B^2(\overline{x_1})} \tag{2.50}$$

2.4.4 Stima del livello di fiducia

In molte applicazioni di misura, oltre all'incertezza tipo combinata $u_c(y)$ è opportuno fornire l'incertezza estesa $U(y) = k_p \cdot u_c(y)$, in modo da individuare un intervallo (di fiducia) di estremi $y_0 - k_p \cdot u_c(y)$ ed $y_0 + k_p \cdot u_c(y)$ che ha probabilità p (livello di fiducia) di contenere il valore sperato della grandezza in misura Y. Il fattore di copertura k_p corrispondente al livello di fiducia p dipende dalla d.d.p. della v.a. in misura.

Nella maggior parte delle applicazioni, si può assumere con buona approssimazione che la v.a. in misura sia distribuita normalmente, per cui la corrispondenza tra livello di fiducia e fattore di copertura è ottenuta a partire dall'espressione della d.d.p. gaussiana oppure, più semplicemente, da tabelle che riportano direttamente tale corrispondenza [3]. Valori di k_p tipicamente usati nella pratica sono 2 e 3, che corrispondono rispettivamente ai livelli di fiducia del 95.4% e del 99.7% circa.

Se sussistono ragionevoli dubbi sulla normalità della d.d.p. della v.a. in misura, si può utilizzare la disuguaglianza di Chebychev [3], che fornisce un limite superiore alla probabilità che il misurando cada all'esterno dell'intervallo $y_0 \pm k_p \cdot u_c(y)$ indipendentemente dalla funzione d.d.p. Tuttavia, questo limite superiore, che è pari a k^{-2}, è quasi sempre molto più grande della probabilità effettiva: nel caso di d.d.p. gaussiana, per esempio, la probabilità che il misurando cada fuori dall'intervallo $y_0 \pm 3 \cdot u_c(y)$ è pari a 0.003, mentre il limite superiore fornito dalla disuguaglianza di Chebychev vale circa 0.11.

Una migliore corrispondenza tra livello di fiducia e fattore di copertura può essere ottenuta ricorrendo alle tecniche suggerite in [2], che sono riassunte nell'appendice A. Si osservi tuttavia che queste tecniche sono impiegate quasi esclusivamente nelle applicazioni di misura di alto livello, ossia nel caso in cui le incertezze sono 'vicine' a quelle dei campioni primari di riferimento.

2.4.5 Modalità di dichiarazione di una misura

Nel caso di una misura ottenuta applicando il modello probabilistico per il calcolo dell'incertezza, le informazioni essenziali da fornire sono:

- il valore stimato y_0 della grandezza in misura con la corrispondente unità di misura;
- l'incertezza tipo combinata $u_c(y)$ o, alternativamente, l'incertezza estesa $U(y)$ ed il fattore di copertura k_p impiegato.

Queste informazioni sono sufficienti nel caso di misure di bassa e media qualità, ossia misure caratterizzate da incertezze molto più elevate di quella con cui è realizzato il campione primario dell'unità di misura della grandezza considerata (si veda il capitolo 3 per alcuni esempi).

Nel caso di misure caratterizzate da incertezze 'simili' (da uno a due ordini di grandezza) a quelle dei campioni primari, è invece opportuno fornire le seguenti informazioni aggiuntive:

- gli effetti sistematici presi in considerazione ed il modello impiegato per la loro correzione;
- un elenco dei contributi di incertezza considerati, indicando per ciascuno di essi la modalità di valutazione (categoria A e/o B);
- le informazioni impiegate per le valutazioni di categoria B dell'incertezza;
- il numero di osservazioni utilizzate per le valutazioni di categoria A dell'incertezza;

- il numero di gradi di libertà effettivi (si veda l'appendice A);

- la stima della covarianza, o del coefficiente di correlazione, tra le grandezze in gioco.

Per quanto riguarda il numero di cifre utilizzato per comunicare i valore dell'incertezza (tipo o estesa) ed il valore del misurando, valgono le considerazioni del paragrafo 2.3.3.

Capitolo 3

Il Sistema Internazionale delle unità di misura

Il 'sogno' dell'adozione di una convenzione riconosciuta a livello internazionale per la definizione delle unità di misura e dei campioni rappresentativi di tali unità nacque all'alba della rivoluzione francese, quando nel 1791 l'Assemblea nazionale, seguendo il parere dell'Accademia delle Scienze, decise di adottare il quarto di meridiano terrestre come campione universale dell'unità di misura di lunghezza, derivando da questa le unità di superficie, volume, capacità e massa. L'unità di misura della lunghezza fu scelta pari alla diecimilionesima parte del quarto di meridiano e ad essa fu assegnato il nome di metro, dal greco $\mu\epsilon\tau\rho o\nu$, latino metrum = misura (in senso generale). Il 24 giugno 1792 partì da Parigi una spedizione 'per tutti i tempi, per tutti gli uomini', che avrebbe portato due astronomi alla misurazione del quarto di meridiano terrestre che si estende tra Dunkerque e Barcellona, La Méridienne [5]. Il 22 giugno 1799, la Commissione internazionale proclamò i risultati della spedizione e depositò i campioni in platino del metro e del kilogrammo presso gli Archivi di Francia.

Da allora, attraverso definizioni di nuove unità di misura e di campioni, ratifiche di convenzioni internazionali ed emanazione di norme, si giunge al 1961, quando la 'Conférence Génerale des Poids et Mesures' (CGPM) introduce il Sistema Internazionale di unità, che in Italia è stato legalmente adottato nel 1982 tramite il DPR 802/1982.

3.1 Caratteristiche del Sistema Internazionale di unità

Il Sistema Internazionale di unità (SI), derivato dall'estensione del sistema razionalizzato di Giorgi [6], è costituito dall'insieme delle definizioni delle unità di misura e dei campioni di sette grandezze fondamentali (o di base), di due grandezze supplementari e di un numero opportuno di grandezze derivate, le cui unità di misura sono ottenute a partire dalle unità fondamentali e supplementari.

Le sette grandezze fondamentali, le unità di misura ed i corrispondenti simboli sono riportati nella tabella seguente.

Grandezza	**Unità di misura**	**Simbolo**
Lunghezza	metro	m
Massa	kilogrammo	kg
Intervallo di tempo	secondo	s
Intensità di corrente elettrica	ampere	A
Temperatura	kelvin	K
Intensità luminosa	candela	cd
Quantità di sostanza	mole	mol

Le due grandezze supplementari sono:

- l'angolo piano, con l'unità di misura 'radiante' (simbolo rad);
- l'angolo solido, con l'unità di misura 'steradiante' (simbolo sr).

Le unità di misura delle grandezze derivate sono tutte ottenibili con il seguente monomio:

$$\mathrm{m}^{\alpha} \cdot \mathrm{kg}^{\beta} \cdot \mathrm{s}^{\gamma} \cdot \mathrm{A}^{\delta} \cdot \mathrm{K}^{\varepsilon} \cdot \mathrm{mol}^{\varphi} \cdot \mathrm{cd}^{\lambda} \cdot \mathrm{rad}^{\mu} \cdot \mathrm{sr}^{\nu} \tag{3.1}$$

Ad alcune unità di misura di grandezze derivate è assegnato, per comodità, un nome, come per esempio per la forza (unità di misura newton: simbolo $\mathrm{N} = \mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}$), la potenza (unità di misura watt: simbolo $\mathrm{W} = \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-3}$) e la frequenza (unità di misura hertz: simbolo $\mathrm{Hz} = \mathrm{s}^{-1}$). Tuttavia, il nome dell'unità di misura di una grandezza derivata è generalmente ottenuto dalla combinazione dei nomi delle unità presenti nel monomio di definizione: l'unità di misura della velocità è quindi m/s (metro al secondo), mentre quella del volume è m^3 (metro cubo).

Per come è definito, il Sistema Internazionale delle unità è:

completo in quanto tutte le grandezze fisiche possono essere ricavate dalle grandezze fondamentali tramite relazioni analitiche;

coerente poiché il prodotto ed il quoziente di due o più unità danno origine ad una nuova unità di valore unitario, per cui le relazioni analitiche che definiscono le unità delle grandezze derivate non contengono fattori di proporzionalità diversi da 1;

assoluto in quanto è costituito da un insieme di unità caratterizzate da invariabilità temporale e spaziale;

razionalizzato in quanto, grazie all'aggiunta del fattore 4π nell'espressione della permeabilità del vuoto, le relazioni analitiche che legano le diverse grandezze contengono il numero irrazionale π solo nel caso di configurazioni circolari, sferiche o cilindriche;

decimale poiché multipli e sottomultipli delle unità di misura sono potenze di 10.

3.2 Definizione delle unità fondamentali SI

In questa sezione sono riportate le definizioni delle sette unità fondamentali SI, accompagnate da una breve descrizione del campione che realizza ciascuna unità e dall'indicazione dell'incertezza con cui queste unità sono realizzate a livello primario nazionale. Per la definizione delle altre unità SI (supplementari e derivate), si può consultare il documento [7].

3.2.1 Lunghezza

L'unità di misura della lunghezza è il metro (simbolo m).

Un metro è la lunghezza del tragitto compiuto dalla luce nel vuoto in un intervallo di tempo pari a $\frac{1}{299792458}$ s.

La velocità di propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto (velocità della luce) è una costante fondamentale della fisica, il cui valore, assunto come esatto (ossia privo di incertezza) e immodificabile, è pari a $c_0 = 299792458$ m/s.

Il campione nazionale di lunghezza è realizzato presso l'Istituto Metrologico Gustavo Colonnetti (IMGC) di Torino mediante laser elio-neon stabilizzati per riferimento a transizioni della molecola dello iodio. Il valore della lunghezza d'onda ($\lambda = 632991398.22$ fm) è ricavato da una misura di frequenza rispetto al campione di tempo in base alla relazione $\lambda = c_0/f$, con un'incertezza tipo relativa di $2.5 \cdot 10^{-11}$.

3.2.2 Massa

L'unità di misura della massa è il kilogrammo[1](simbolo kg).

Il kilogrammo è uguale alla massa del prototipo internazionale conservato al Pavillon de Breteuil (Sevres, Francia). Il prototipo è costituito da un cilindro di platino-iridio di altezza uguale al diametro (38 mm), custodito in una tripla teca sotto vuoto insieme ad altre sei copie di riscontro.

Il campione nazionale è la copia n. 62 del prototipo internazionale, conservata presso IMGC, con il suo testimone n. 76; la sua massa è nota con un'incertezza tipo relativa di $2.3 \cdot 10^{-9}$. Presso il Ministero dell'Industria, del Commercio e dell'Artigianato esistono anche le copie n. 5 e n. 19 denominate rispettivamente prototipo nazionale del primo e del secondo ordine impiegate in metrologia legale.

L'unità di massa è l'unica unità fondamentale SI basata su un campione artificiale, per cui è difficoltoso garantirne l'invariabilità spaziale e temporale. Per ovviare a ciò, è auspicabile un prossimo collegamento dell'unità di massa con le costanti fondamentali e atomiche.

3.2.3 Intervallo di tempo

L'unità di misura dell'intervallo di tempo è il secondo (simbolo s).

Il secondo è la durata di 9192631770 periodi della radiazione corrispondente alla transizione tra i due livelli iperfini dello stato fondamentale dell'atomo di cesio 133[2].

---

[1] Tra le unità fondamentali SI, l'unità di massa è la sola il cui nome contiene, per ragioni storiche, un prefisso.

[2] Il ^{133}Cs ha un nucleo formato da 55 protoni e 78 neutroni. Lo stato fondamentale è lo stato in cui un atomo ha la configurazione elettronica di minima energia. La suddivisione dello stato fondamentale in livelli iperfini è dovuta all'interazione degli elettroni con il

La scala di tempo nazionale è derivata presso l'Istituto Elettrotecnico Nazionale Galileo Ferraris (IEN) di Torino da un insieme di orologi atomici al cesio indipendenti ed è confrontata via satellite con le scale di tempo degli altri paesi. Essa è mantenuta entro ± 100 ns rispetto al riferimento internazionale UTC (Universal Time Coordinated). L'unità di tempo è realizzata presso IEN con un'incertezza tipo relativa di $1 \cdot 10^{-13}$.

3.2.4 Intensità di corrente elettrica

L'unità di misura dell'intensità di corrente elettrica è l'ampere (simbolo A).

Un ampere è quella corrente costante che, se mantenuta in due conduttori paralleli di lunghezza infinita, di sezione circolare trascurabile e posti nel vuoto alla distanza di un metro l'uno dall'altro, determina tra i due conduttori la forza di $2 \cdot 10^{-7}$ newton per ogni metro di lunghezza[3].

L'unità di corrente è derivata presso IEN dal campione nazionale di tensione elettrica (schiera di giunzioni Josephson) e di resistenza elettrica (dispositivo per l'effetto Hall quantistico). L'unità di corrente è quindi ottenuta a partire dalla relazione $I = U/R$ tra la corrente elettrica I e la tensione U che essa produce attraversando una resistenza R. L'incertezza tipo relativa è di $5 \cdot 10^{-7}$.

3.2.5 Temperatura

L'unità di misura della temperatura (termodinamica) è il kelvin (simbolo K). La temperatura può essere espressa anche nell'unità grado celsius (simbolo °C); la relazione tra la temperatura espressa in gradi celsius (simbolo t) e la temperatura espressa in kelvin (simbolo T) è: $t = T - 273.15$.

momento magnetico del nucleo; la differenza in energia ΔE tra i livelli iperfini è molto piccola rispetto alla differenza in energia tra i livelli principali dell'atomo. Durante la transizione tra due livelli di energia, l'atomo emette onde elettromagnetiche di frequenza $\nu = \Delta E/h$, corrispondente ad una lunghezza d'onda $\lambda = c_0/\nu$ ed un periodo $T = 1/\nu$; h è la costante di Planck e c_0 è la velocità delle onde elettromagnetiche nel vuoto. La radiazione emessa dal ^{133}Cs durante la transizione in questione ha frequenza ν di circa 10^{10} Hz e lunghezza d'onda λ pari a circa 3 cm (cade quindi nella regione delle microonde). Il secondo è pertanto definito come un multiplo intero del periodo $T = 1/\nu$ della radiazione emessa dal cesio.

[3] Questa definizione fissa la permeabilità magnetica del vuoto al valore $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$H/m.

Un kelvin è la frazione 1/273.16 della temperatura del punto triplo dell'acqua.

Il punto triplo dell'acqua è realizzato presso IMGC con un'incertezza tipo assoluta di cira 0.1 mK. La scala di temperatura internazionale del 1990 (STI-90), che definisce sia le temperature internazionali kelvin, simbolo T90, che le temperature internazionali celsius, simbolo t90, sempre con unità kelvin e grado celsius rispettivamente, è realizzata nell'intervallo da 25 K a 3000 K utilizzando 12 punti fissi e due tipi di termometro campione: il termometro a resistenza elettrica di platino tra 25 K e 1235 K ed a radiazione tra 1235 K e 3000 K.

3.2.6 Intensità luminosa

L'unità di misura dell'intensità luminosa è la candela (simbolo cd).

Una candela è l'intensità luminosa, in una data direzione, di una sorgente che emette una radiazione monocromatica di frequenza $540 \cdot 10^{12}$ Hz e la cui intensità energetica in quella direzione è pari a $\frac{1}{683}$ W/sr.

L'unità di intensità luminosa è realizzata presso IEN per derivazione dai campioni nazionali di tensione elettrica e di resistenza elettrica mediante un radiometro assoluto; essa è conservata mediante un gruppo di lampade ad incandescenza alimentate in corrente continua e tarate ad intensità di corrente costante. L'incertezza tipo relativa è di $5 \cdot 10^{-3}$ per intensità luminose da 100 cd a 500 cd.

3.2.7 Quantità di sostanza

L'unità di misura della quantità di sostanza è la mole (simbolo mol).

Una mole è la quantità di sostanza di un sistema che contiene tante entità elementari quanti sono gli atomi[4] contenuti in 0.012 kg di carbonio 12. Quando si usa la mole, le entità elementari devono essere specificate, e possono essere atomi, molecole, ioni, elettroni, altre particelle o gruppi specificati di tali particelle.

Il numero di entità elementari contenute in una mole corrisponde alla costante di Avogadro, che è stata determinata anche presso IMGC da misure di

[4] In questa definizione si fa riferimento ad atomi di carbonio 12 non legati, a riposo e nello stato fondamentale.

massa volumica e di costante reticolare (interferometria a raggi X) su monocristalli di silicio molto puri. La costante di Avogadro, $N_A = 6.02214199 \cdot 10^{23}$, è nota con incertezza tipo relativa di $7.9 \cdot 10^{-8}$.

3.3 Regole di scrittura

La norma italiana CNR-UNI 10003 [7] è stata emanata nel 1984 con lo scopo di raccomandare l'adozione del sistema internazionale di unità e di fornire le definizioni delle unità di misura delle grandezze fondamentali, supplementari e derivate. La stessa norma indica inoltre le regole di scrittura riguardanti l'uso dei simboli delle unità di misura e dei loro multipli e sottomultipli, che sono riassunte in questa sezione.

Per questioni di praticità, sono stati introdotti i multipli ed i sottomultipli decimali delle unità di misura SI, che si ottengono utilizzando i prefissi SI riportati nella tabella che segue.

Nome	Simbolo	Fattore di moltiplicazione
exa	E	10^{18}
peta	P	10^{15}
tera	T	10^{12}
giga	G	10^{9}
mega	M	10^{6}
kilo	k	10^{3}
etto	h	10^{2}
deca	da	10^{1}
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Il simbolo di un multiplo o di un sottomultiplo di un'unità di misura si forma anteponendo il prefisso al simbolo dell'unità di misura; di seguito sono riportati alcuni esempi:

0.000005 m $= 5 \cdot 10^{-6}$ m $= 5$ μm (cinque micrometri)
0.00000001 A $= 1 \cdot 10^{-8}$ A $= 10$ nA (dieci nanoampere)
2000000 V $= 2 \cdot 10^{6}$ V $= 2$ MV (due megavolt)

Non è ammesso l'uso di prefissi composti, per cui è corretto scrivere 5 pF ma NON si può scrivere 5 mnF.

I multipli ed i sottomultipli del'unità fondamentale kilogrammo si formano a partire dal simbolo del grammo (g), per cui 10^{-6} kg sarà scritto come 1 mg e NON come 1 μkg.

Quando si fornisce il risultato di una misurazione, devono essere riportate soltanto le cifre significative, per cui è opportuno ricorrere ai multipli e sottomultipli delle unità SI per evitare ambiguità. Nella tabella seguente sono riportati alcuni esempi.

Cifre significative	Uso di unità SI	Uso di multipli e sottomultipli
3	0.00000758 A	7.58 μA
2	7500 N	7.5 kN
4	13500 V	13.50 kV
3	0.000115 m^3	115 cm^3

I nomi delle unità SI, dei multipli e dei sottomultipli sono nomi comuni, per cui devono essere scritti con l'iniziale minuscola. si scriverà quindi ampere e NON Ampere, kelvin e NON Kelvin, gigahertz e NON Gigahertz o GigaHertz. Anche i simboli delle unità di misura sono scritti con l'iniziale minuscola, tranne quelli derivanti da nomi propri (ad esempio s per secondo, m per metro, C per coulomb, J per joule).

I nomi di tutte le unità SI e dei corrispondenti multipli e sottomultipli sono invariabili al plurale, eccetto per il metro, il kilogrammo, il secondo, la candela, la mole, il radiante e lo steradiante. È quindi corretto scrivere: decine di metri, centinaia di volt (e NON volts), alcuni radianti, pochi kelvin (e NON kelvins).

I simboli delle unità di misura devono essere scritti in carattere diritto normale, non devono essere seguiti da punti (tranne il caso in cui si trovano alla fine di un periodo) e devono seguire sulla stessa linea il valore numerico che esprime la misura (7.5 V e NON V 7.5). Quando un'unità non accompagna la relativa misura, deve essere espressa con il suo nome e non con il suo simbolo: si scriverà quindi 'il secondo è la durata ...' e NON 'il s è la durata', oppure 'una lunghezza di alcuni metri' e NON 'una lunghezza di alcuni m'.

Il simbolo di un'unità derivata ottenuta dal prodotto di due o più unità fondamentali si indica interponendo il punto di moltiplicazione o uno spazio tra i simboli delle unità fondamentali (ad esempio $N \cdot m$ oppure $N\ m$). Nel caso di unità derivate ottenute dal rapporto tra unità fondamentali, il simbolo dell'unità derivata si indica interponendo tra i simboli a numeratore e quelli a denominatore la barra obliqua o la riga di frazione; in alternativa possono essere usati gli esponenti negativi (ad esempio J/s, $m \cdot s^{-1}$, ...).

3.3.1 Unità non SI ammesse

Alcune unità di misura non SI sono, per ragioni storiche, largamente utilizzate in campo scientifico, tecnico, commerciale e nella vita comune. Per questo motivo, nel 1996 il CIPM (Comité International des Poids et Mesures) ha classificato le unità non SI ammesse all'uso in 3 categorie:

- unità di uso frequente;
- unità il cui valore è ottenuto sperimentalmente;
- unità in uso solo in specifici settori applicativi.

L'uso di queste unità è ammesso, ma non incoraggiato; inoltre è sconsigliato associare unità SI e unità non SI.

La tabella che segue riporta alcune delle unità non SI ammesse, che appartengono alla prima e terza categoria; per un elenco completo delle unità non SI ammesse si veda il documento [8].

Grandezza	**Unità**	**Simbolo**	**Conversione**
Volume	litro	l,L	$1\ l = 10^{-3}\ m^3$
massa	tonnellata	t	$1\ t = 10^3\ kg$
tempo	minuto	min	$1\ min = 60\ s$
tempo	ora	h	$1\ h = 3600\ s$
tempo	giorno	d	$1\ d = 86400\ s$
angolo piano	grado	°	$1° = (\pi/180)\ rad$
lunghezza	ångström	Å	$1\ Å = 10^{-10}\ m$
pressione	bar	bar	$1\ bar = 10^5\ Pa$

3.4 Organizzazione internazionale della metrologia

L'organigramma dell'organizzazione internazionale della metrologia è riassunto nella figura 3.1. La convenzione del metro (*Convention du Métre*) è un trattato diplomatico che fu stipulato nel 1875 a Parigi dai rappresentanti di diciassette stati, tra cui l'Italia; oggigiorno gli stati che vi aderiscono sono cinquantuno. La convenzione del metro riconosce l'autorità della *Conférence Générale des Poids et Mesures* (CGPM), del *Comité International des Poids et Mesures* (CIPM) e del *Bureau International des Poids et Mesures* (BIPM) in materia di metrologia primaria internazionale.

Alla CGPM, che si riunisce a Parigi ogni quattro anni (l'ultima riunione risale al 21 ottobre 1999), partecipano i rappresentanti di tutti gli stati firmatari della convenzione del metro. Il CIPM, che è l'organo tecnico della CGPM, organizza la conferenza e presenta un rapporto relativo all'attività svolta. I principali obiettivi che la CGPM si prefigge sono:

- discutere ed esaminare i provvedimenti da adottare per assicurare la propagazione e lo sviluppo del Sistema Internazionale di unità;
- approvare risoluzioni scientifiche di portata internazionale;
- decidere circa l'organizzazione e lo sviluppo del BIPM per i successivi quattro anni.

Il CIPM si riunisce annualmente presso il BIPM e discute i rapporti presentati dai nove Comitati Consultivi (CC) di cui si avvale (elettricità, fotometria e radiometria, termometria, definizione del metro, definizione del secondo, radiazioni ionizzanti, unità, massa, quantità di sostanza). Inoltre, il CIPM invia ai governi membri della convenzione del metro un rapporto annuale che descrive la posizione amministrativa e finanziaria del BIPM.

Il BIPM, che ha sede a Sévres vicino a Parigi e che è finanziato dagli stati membri della convenzione del metro, è un laboratorio metrologico internazionale che opera sotto la supervisione del CIPM. Il principale mandato del BIPM consiste nel fornire le basi scientifiche per favorire lo sviluppo, a livello mondiale, del Sistema Internazionale di unità (SI). Questo obiettivo è perseguito attraverso le seguenti attività:

- realizzazione e disseminazione delle unità di misura SI;

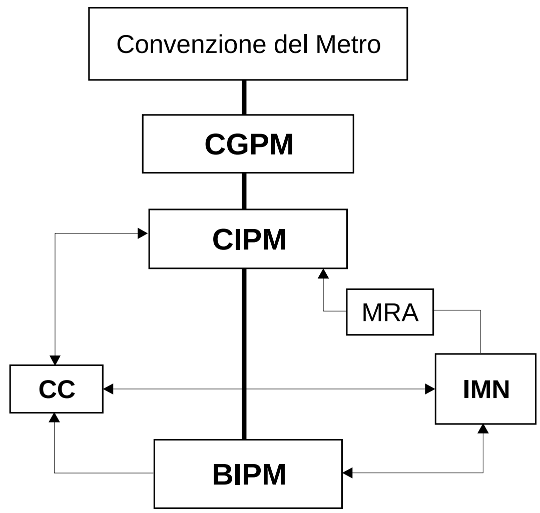

Figura 3.1: *Organigramma dell'organizzazione internazionale della metrologia.*

- organizzazione di confronti internazionali tra campioni di misura realizzati presso gli Istituti Metrologici Nazionali (IMN);
- determinazione delle costanti fisiche fondamentali.

Il 14 ottobre del 1999, i rappresentanti degli IMN degli stati che aderiscono alla convenzione del metro hanno firmato l'accordo di mutuo riconoscimento (*Mutual Recognition Arrangement*: MRA); per l'Italia l'accordo è stato firmato dal prof. Sigfrido Leschiutta, presidente dell'Istituto Elettrotecnico Nazionale 'Galileo Ferraris'. I principali obiettivi di questo accordo possono essere riassunti nei seguenti punti:

- stabilire l'equivalenza tra i campioni delle unità di misura SI realizzati presso gli IMN;
- assicurare il mutuo riconoscimento dei certificati di taratura emessi dagli IMN;
- fornire agli stati firmatari del MRA una solida base tecnica per operare in modo conforme nei settori scientifico, legale e del commercio.

A partire dalla struttura descritta, sono nati organismi metrologici regionali con lo scopo di perseguire gli obiettivi indicati dal MRA. In Europa, da gennaio 1988 è operativa EUROMET, un'organizzazione per la collaborazione tra gli IMN dei paesi europei. Un'altra importante struttura a livello europeo è la *European cooperation for Accreditation* (EA), che riunisce organismi di accreditamento che operano in diversi settori, tra cui taratura, prova, ispezione, certificazione di sistemi e certificazione di prodotti. Ogni organismo che aderisce ad EA deve seguire regole prestabilite ed è valutato dagli altri membri EA. Se questa valutazione ha esito positivo, è firmato un accordo multilaterale (*Multi Lateral Agreement*, MLA), grazie al quale tutti i membri EA riconoscono l'equivalenza dei propri sistemi di accreditamento e dei certificati di taratura e prova emessi dagli organismi accreditati dai membri EA.

I membri EA che hanno stabilito l'accordo multilaterale per i sistemi di accreditamento dei laboratori di taratura e di prova sono: Austria, Belgio, Danimarca, Finlandia, Francia, Germania, Irlanda, Italia, Norvegia, Paesi Bassi, Portogallo, Regno Unito, Repubblica Ceca, Spagna, Svezia e Svizzera. Hanno inoltre aderito al MLA Australia, Hong Kong (solo per laboratori di prova), Nuova Zelanda, Singapore, Stati Uniti e Sud Africa (solo per i laboratori di prova).

A livello nazionale, la legge n. 273 del 11 agosto 1991 ha istituto il Sistema Nazionale di Taratura (SNT), che è costituito dagli istituti metrologici primari e dai centri di taratura SIT (si veda la figura 3.2) e ha il compito di assicurare la riferibilità ai campioni nazionali dei risultati delle misurazioni. Gli istituti metrologici primari italiani sono:

- Istituto di Metrologia 'Gustavo Colonnetti' (IMGC) del Consiglio nazionale delle ricerche, che si occupa della realizzazione e della conservazione dei campioni delle unità di misura impiegate nel campo della meccanica e della termologia;

- Istituto Elettrotecnico Nazionale 'G. Ferraris' (IEN) per i campioni riguardanti le unità di misura del tempo e quelle impiegate nel campo dell'elettricità, della fotometria, dell'optometria e dell'acustica;

- Istituto Nazionale di Metrologia delle Radiazioni Ionizzanti (INMRI) dell'ENEA per i campioni delle unità di misura impiegate nel campo delle radiazioni ionizzanti.

La disseminazione delle unità di misura realizzate dai campioni nazionali è effettuata direttamente dagli istituti metrologici primari o dai centri di taratura appartenenti al Sistema di Taratura in Italia (SIT). I centri di taratura

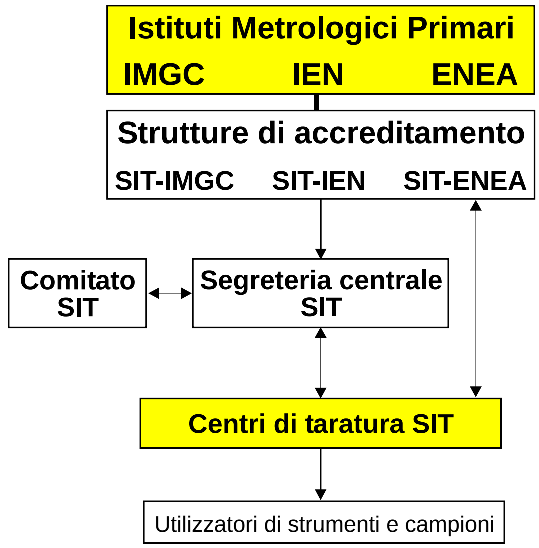

Figura 3.2: *Il Sistema Nazionale di Taratura.*

SIT sono laboratori di idonea valenza tecnica e organizzativa convenzionati con gli istituti metrologici primari, i cui campioni secondari sono confrontati periodicamente con i campioni nazionali.

Ciascun istituto metrologico primario si avvale di una propria struttura per effettuare l'accreditamento SIT dei centri di taratura (ad esempio, un laboratorio che esegue tarature di strumenti per grandezze elettriche è accreditato da IEN). La segreteria centrale SIT coordina l'attività delle strutture di accreditamento presso IMGC, IEN ed ENEA allo scopo di armonizzare e rendere efficace l'attività di accreditamento. La segreteria centrale SIT svolge inoltre il ruolo di interfaccia verso i centri SIT ed organizza corsi per l'aggiornamento del personale di tali centri, esegue la revisione dei documenti SIT e mantiene aggiornata la formazione degli ispettori.

Gli istituti metrologici primari italiani hanno aderito, dal 1999, all'accordo di mutuo riconoscimento (MRA) tra gli IMN. La struttura di accreditamento SIT e le altre strutture di accreditamento italiane, ossia SINAL (per i laboratori di prova) e SINCERT (per gli organismi di ispezione e di certificazione di prodotti, sistemi qualità aziendali e sistemi di gestione ambientale e del personale), aderiscono al *Multi Lateral Agreement* in ambito EA.

Appendice A

Corrispondenza tra livello di fiducia e fattore di copertura

Si consideri inizialmente il caso di una v.a. Y per cui sia noto a priori che la distribuzione di probabilità è gaussiana. Si supponga inoltre che gli stimatori empirici della media $\overline{y}$ e dello scarto tipo sperimentale della media $s(\overline{y})$ sono stati applicati a partire da un numero N di osservazioni non sufficientemente grande per poter considerare gaussiana la distribuzione campionaria di probabilità delle N osservazioni disponibili. In questo caso si definisce la nuova v.a. t:

$$t = \frac{\overline{y} - \mu_y}{s(\overline{y})} \tag{A.1}$$

dove μ_y indica il valore sperato della v.a. in misura Y.

Si dimostra che la v.a. t è distribuita secondo la funzione d.d.p. di Student caratterizzata da $\nu = N - 1$ gradi di libertà (numero di osservazioni indipendenti meno il numero di vincoli imposti). Da queste informazioni è possibile calcolare la seguente probabilità:

$$P[-t_p(\nu) < t < t_p(\nu)] = p \tag{A.2}$$

che, sostituendo la definizione della v.a. t e dopo semplici passaggi algebrici, esprime la probabilità che il valore sperato di Y sia compreso nell'intervallo $(\overline{y} - t_p(\nu) \cdot s(\overline{y}), \overline{y} + t_p(\nu) \cdot s(\overline{y}))$:

$$P[\overline{y} - t_p(\nu) \cdot s(\overline{y}) < \mu_y < \overline{y} + t_p(\nu) \cdot s(\overline{y})] = p \tag{A.3}$$

Fissato il livello di fiducia p e noto il numero di gradi di libertà ν, il corrispondente fattore di copertura $k_p = t_p(\nu)$ si determina a partire dall'espressione della d.d.p. di Student [3]. Una tabella che riporta i valori di $t_p(\nu)$ della distribuzione di Student con ν gradi di libertà che definiscono un intervallo $(-t_p(\nu), +t_p(\nu))$ comprendente una frazione p della distribuzione può essere trovata in [2].

In pratica, se y è la stima di una grandezza ottenuta in modo indiretto a partire dal modello 2.40, la v.a. t **non** è distribuita secondo la d.d.p. di Student, anche nel caso in cui le grandezze di ingresso $X_1, \ldots, X_M$ sono distribuite normalmente. Per tenere conto di ciò, la distribuzione della v.a. $\frac{\overline{y}-\mu_y}{u_c(y)}$ è approssimata dalla d.d.p. di Student caratterizzata da un numero di gradi di libertà effettivi ν_{eff} calcolati mediante la formula di Welch-Satterthwaite [2]:

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4(y)}{\sum_{i=1}^{M} \frac{u_i^4(y)}{\nu_i}} \tag{A.4}$$

dove $u_i(y) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot u(x_i)$.

L'incertezza estesa $U_p(y)$ corrispondente ad un livello di fiducia p è quindi ottenuta come $U_p(y) = t_p(\nu_{eff}) \cdot u_c(y)$.

Nell'applicazione della relazione A.4 nasce il problema di stimare il numero di gradi di libertà ν_i nel caso in cui l'incertezza tipo $u(x_i)$ sia stata ottenuta con un metodo di categoria B, ossia quando non si ha a disposizione un campione di osservazioni della grandezza in misura. Ricordando tuttavia che, per una v.a. caratterizzata dalla d.d.p. di Student il numero di gradi di libertà ν ha il significato di incertezza dello stimatore scarto tipo sperimentale della media:

$$\sigma^2[s(\overline{x})] \approx \frac{\sigma^2(\overline{x})}{2\nu} \Longrightarrow \nu = \frac{\sigma^2(\overline{x})}{2 \cdot \sigma^2[s(\overline{x})]} \tag{A.5}$$

il numero di gradi di libertà è stimato in pratica mediante la seguente relazione:

$$\nu = \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta u(x)}{u(x)} \right]^{-2} \tag{A.6}$$

Si osservi che nella relazione precedente, il termine dentro parentesi quadra rappresenta l'incertezza relativa della stima dell'incertezza tipo $u(x)$, che è valutata dall'operatore in modo soggettivo in base alle conoscenze disponibili.

Bibliografia

[1] UNI 4546: Misure e misurazioni. Termini e definizioni fondamentali. *Norma italiana*. Novembre 1984.

[2] UNI CEI ENV 13005: Guida all'espressione dell'incertezza di misura. *Norma sperimentale*. Luglio 2000.

[3] P. Galeotti. *Elementi di probabilità e statistica*. Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino, 1984.

[4] D.W. Allan. *IEEE Tr. on IM*, **IM-36**:646–654, 1987.

[5] D. Guedj. *Il Meridiano*. Longanesi & C., Milano, 2001.

[6] E. Arri e S. Sartori. *Le misure di grandezze fisiche - manuale di metrologia*. Paravia & C., Torino, 1984.

[7] CNR-UNI 10003: Sistema internazionale di unità (SI). *Norma italiana*. 1984.

[8] Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), SI brochure. *(http://www.bipm.fr/enus/6_Publications/si/si-brochure.html)*.